

Outils mathématiques

Fonctions d'une seule variable

Considérons une fonction f dépendant d'une variable t que l'on note $f(t)$.

Dérivée de f par rapport à t est : $\frac{df}{dt}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} \right)$ Simplification : $\frac{df}{dt}(t) = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$

Différentielle de f en t : $df(t) = f(t+dt) - f(t)$

Soit une fonction f qui dépend d'une variable x , elle-même étant une fonction d'une variable t , $f(x(t))$.

Dérivée d'une fonction composée : $\frac{df}{dt} = \left(\frac{df}{dx} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right)$

Fonctions de plusieurs variables

Dérivée partielle par rapport à x d'une fonction $f(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \right)_{y,z,t} = \frac{f(x+dx, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{dx}$$

Différentielle d'une fonction $f(x, y, z, t)$: $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z,t} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x,z,t} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x,y,t} dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{x,y,z} dt$

Intégrale simple par rapport à x : $\int f(x, y, z, t) dx$

Intégrale double de la fonction $f(x, y, z)$ par rapport à x et y : $\iint f(x, y, z) dx dy$

Intégrale triple de la fonction $f(x, y, z)$ par rapport à x, y et z : $\iiint f(x, y, z) dx dy dz$

Développements limités

Approximation linéaire : développement limité à l'ordre 1 en physique ($|x - x_0| \ll 1$), ce qui donne :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{df}{dx}(x_0)$$

Développements limités usuels en 0 :

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = x + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

Systèmes de coordonnées

A un référentiel d'étude s'associe un repère de centre O servant à définir ce référentiel. La position d'un point M est définie à un instant t par le vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Coordonnées cartésiennes

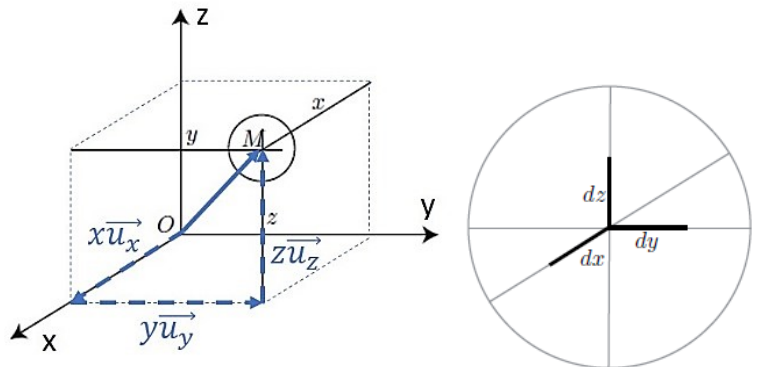
Dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on utilise les coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$



Coordonnées cylindriques

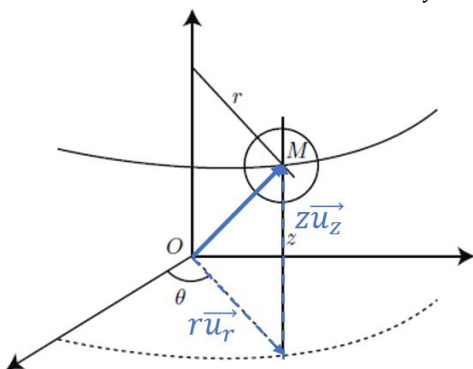
Dans le repère $\mathcal{R}_{cyl}(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{cyl}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{cyl}}$$

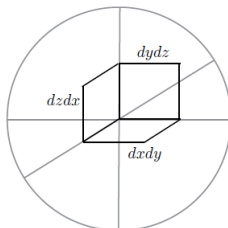


Surfaces et volumes élémentaires

Coordonnées cartésiennes

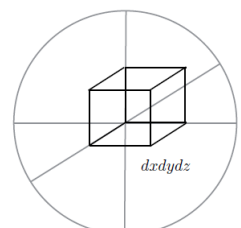
Surface élémentaire

$$\begin{cases} x = cte & dS = dydz \\ y = cte & dS = dx dz \\ z = cte & dS = dx dy \end{cases}$$



Volume élémentaire

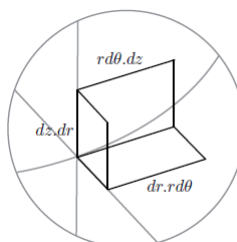
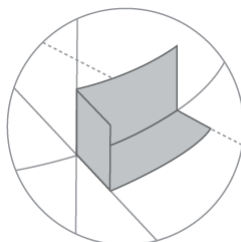
$$dV = dx dy dz$$



Coordonnées cylindriques

Surface élémentaire

$$\begin{cases} r = cte & dS = r d\theta dz \\ \theta = cte & dS = dr dz \\ z = cte & dS = r dr d\theta \end{cases}$$



Volume élémentaire

$$dV = r dr d\theta dz$$

