Electrostatique

Extrait du programme

Les notions abordées la partie 4.1 « Électrostatique » sont centrées sur les distributions de charges, le champ et le potentiel. Pour le champ et le potentiel, on se limite aux expressions explicites dans le cas d'une charge ponctuelle et sous forme intégrale dans le cas de distributions continues.

L'accent est mis sur les propriétés intégrales du champ et sur le théorème de Gauss pour des situations présentant un haut degré de symétrie.

Des capacités sur la lecture des lignes de champ et des surfaces équipotentielles sont développées. Le condensateur plan est introduit mais l'étude des conducteurs en équilibre électrostatique ne relève pas du programme. Une approche énergétique est conduite dans le cas d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrique extérieur.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1. Électrostatique	
Loi de Coulomb. Champ électrostatique.	Exprimer le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.
Distributions continues de charges volumique, surfacique, linéique. Principe de superposition.	Décomposer une distribution en des distributions plus simples dans le but de calculer un champ électrostatique par superposition. Choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée. Justifier qualitativement le choix d'une modélisation d'une distribution de charges par une distribution infinie. Évaluer la charge totale d'une distribution continue dans des situations à géométries simples.
Symétries et invariances du champ électrostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges. Identifier les invariances d'une distribution de charges. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique créé.
Circulation du champ électrostatique. Potentiel électrostatique. Gradient.	Relier le champ électrostatique au potentiel. Exprimer le potentiel créé par une charge ponctuelle. Calculer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques. Exprimer une différence de potentiel comme une circulation du champ électrostatique.
Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss.	Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Systèmes modélisés par une sphère, un cylindre infini et un plan infini.	Établir les expressions des champs électrostatiques créés en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume, par un cylindre infini uniformément chargé en volume et par un plan infini uniformément chargé en surface. Établir et exploiter le fait qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.

Condensateur plan modélisé par la superposition de deux distributions surfaciques infinies de charges opposées.	Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide en négligeant les effets de bords.
Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles.	Orienter les lignes de champ électrostatique créées par une distribution de charges. Représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement. Associer, en dehors des sources, les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, tracer quelques lignes de champ et lignes équipotentielles pour une distribution donnée.
Énergie potentielle électrostatique d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.	Établir et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.

Outils numériques

Outils numériques	Capacités exigibles
Représentation graphique d'un champ scalaire ou vectoriel.	Utiliser les fonctions de base (**contour** et **streamplot**) de la bibliothèque matplotlib (leurs spécifications étant fournies) pour représenter des lignes de niveau ou des lignes de champs.

Sommaire

1 FORCE ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE 4

1.1 CHARGES ELECTRIQUES 4
1.2 LOI DE COULOMB 4
1.3 ENERGIE POTENTIELLE ELECTROSTATIQUE 4

2 CHAMP ET POTENTIEL ELECTROSTATIQUE 4

2.1 CHAMP ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE 4
2.2 POTENTIEL ELECTROSTATIQUE 4

3 DISTRIBUTIONS CONTINUES DE CHARGES 5

3.1 DISTRIBUTION VOLUMIQUE DE CHARGES ELECTRIQUES 5
3.2 DISTRIBUTION SURFACIQUE DE CHARGES ELECTRIQUES 6
3.3 DISTRIBUTION LINEIQUE DE CHARGES ELECTRIQUES 6

4 SYMETRIES ET INVARIANCES DU CHAMP ELECTROSTATIQUE 7

4.1 PRINCIPE DE CURIE 7
4.2 SYMETRIES DE LA DISTRIBUTION DE CHARGES 7
4.3 INVARIANCES DE LA DISTRIBUTION DE CHARGES 9

5 THEOREME DE GAUSS 10

5.1 FLUX DU CHAMP ELECTROSTATIQUE 10
5.2 CAS D'UNE CHARGE PONCTUELLE 10
5.3 THEOREME DE GAUSS 11
5.4 TOPOGRAPHIE DU CHAMP ELECTROSTATIQUE 12

6 DISTRIBUTIONS A HAUT DEGRE DE SYMETRIE 13

6.1 SPHERE UNIFORMEMENT CHARGEE EN VOLUME 13
6.2 CYLINDRE « INFINI » UNIFORMEMENT CHARGE EN VOLUME 15
6.3 PLAN « INFINI » UNIFORMEMENT CHARGE EN SURFACE 17

7 ÉTUDE DU CONDENSATEUR PLAN 19

7.1 DESCRIPTION 19
7.2 CHAMP ELECTRIQUE ENTRE LES ARMATURES 19
7.3 CAPACITE DU CONDENSATEUR 21

8 QUESTIONS DE COURS 22

9 EXERCICES TYPE ORAL 23

9.1 VITESSE D'UN ELECTRON EN ORBITE CIRCULAIRE 23
9.2 CARRE DE 4 CHARGES 23
9.3 RELATION POTENTIEL-CHAMP 23
9.4 ETUDE D'UN CANON A ELECTRONS D'UN OSCILLOSCOPE CATHODIQUE (CCP TSI 2014) 23
9.5 CARTES DE CHAMP 24
9.6 FORCES INTERMOLECULAIRES 24
9.7 ETUDE DE DISTRIBUTIONS CONTINUES DE CHARGES 24
9.8 CONDENSATEUR SPHERIQUE 25
9.9 CONDENSATEUR CYLINDRIQUE 25

10 CAPACITE NUMERIQUE POUR LE 05/12/2022 26

10.1 OBJECTIF 26
10.2 HYPOTHESES 26

10.3 PROGRAMME PYTHON 26
11 DM POUR LE 12/12/2022 29

3 Distributions continues de charges

3.1 Distribution volumique de charges électriques

Les charges ponctuelles présentées précédemment sont animées au niveau microscopique d'un mouvement permanent d'agitation.

Pour pouvoir donc les considérer comme statiques et rester dans le cadre de ce cours, il nous faut changer d'échelle et passer à **l'échelle mésoscopique**.

Exemple :

Dans un circuit électronique, on considère une couche de cuivre d'épaisseur $h = 1\mu m$, de largeur $l = 0{,}1mm$ et de longueur $L = 1mm$. Chaque atome de métal cède en moyenne un électron, devenant ainsi un ion, que l'on écrit Cu^+ pour simplifier.

Données : $N_a = 6{,}022.10^{23} mol^{-1}$, $\mu = 8{,}94.10^3 kg.m^{-3}$, $M = 63{,}5 g/mol$

Ordre de grandeur du rayon atomique :

Nombre d'ions dans le volume :

Densité volumique d'ions (ou électrons) :

On va donc considérer une distribution volumique continue de charge de volume total V. On peut décomposer ce volume en volumes élémentaires dV contenant un nombre de particules dN suffisamment grand. On peut alors supposer que le nombre de particules dans ce volume reste quasiment constant et porte la charge élémentaire dq.

On définit alors une **densité de particules chargées** (m^{-3}), n, que l'on peut supposer uniforme telle que :

Définition :

On définit la **densité volumique de charges** ρ ($C.m^{-3}$) par :

Remarques :

On retrouve la charge totale Q de la distribution volumique en intégrant la charge élémentaire sur le volume V par :

Si les porteurs de charges sont tous identiques portant une charge q, alors :

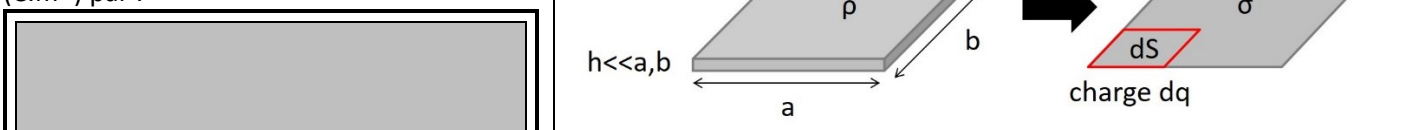
S'il y a plusieurs types de porteurs différents :

Pour calculer le champ électrostatique :

3.2 Distribution surfacique de charges électriques

Lorsque les charges de la distribution sont localisées dans un volume de faible épaisseur h (très inférieure aux dimensions latérales), on peut modéliser la distribution comme une distribution continue surfacique de charges de surface S, décomposable en surfaces élémentaires dS .

Définition :
On définit la densité surfacique de charges σ (C.m^{-2}) par :



Remarques :
On retrouve la charge totale Q de la distribution surfacique en intégrant la charge élémentaire sur la surface S par :

On peut repasser à la distribution volumique par :

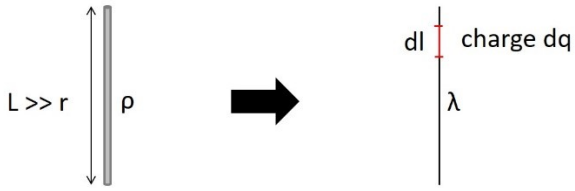
Une distribution surfacique n'est qu'un modèle.
Pour calculer le champ électrostatique :

Le champ électrostatique n'est pas défini sur la distribution surfacique de charges.

3.3 Distribution linéique de charges électriques

Lorsque les charges de la distribution sont localisées dans un volume de longueur L très grande devant les dimensions latérales r, on peut modéliser la distribution comme une distribution continue linéique de charges de longueur L, décomposable en surfaces élémentaires dl .

Définition :
On définit la densité linéique de charges λ (C.m^{-1}) par :



Remarques :
On retrouve la charge totale Q de la distribution linéique en intégrant la charge élémentaire sur la longueur L par :

On peut repasser à la distribution volumique par :

Une distribution linéique n'est qu'un modèle.
Pour calculer le champ électrostatique :

Le champ électrostatique n'est pas défini sur la distribution linéique de charges.

4 Symétries et invariances du champ électrostatique

De manière générale, le calcul de champ électrostatique n'est pas simple. Calculer un champ vectoriel c'est en effet trouver sa direction, son sens et sa norme en tout point de l'espace. En étudiant les symétries de la distribution de charges, on peut heureusement en déduire dans certains cas la direction et le sens du champ électrostatique.

4.1 Principe de Curie

Principe énoncé par Pierre Curie au début du XXème siècle.

Principe de Curie :
Lorsque des causes produisent des effets, les symétries des causes doivent se retrouver dans celles des effets.

Remarque :

Réciproque fausse

Conséquence :

Dans notre cas, la distribution de charges est à l'origine du champ électrostatique, donc le champ aura les mêmes symétries que la distribution.

On dit que c'est un vecteur polaire.

Pour trouver la direction du champ électrostatique en un point M, on cherchera donc les plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de charge contenant le point M.

Propriété :

On dit qu'une distribution de charges présente un haut degré de symétrie si l'étude des propriétés de symétries de la distribution permet de connaître la direction du champ électrostatique en tout point de l'espace.

4.2 Symétries de la distribution de charges

4.2.1 Plan de symétrie

Une distribution de charge possède un plan de symétrie Π si Π est un plan de symétrie géométrique de la distribution et que les charges sont identiques de chaque côté du plan Π. Alors le plan Π sera aussi un plan de symétrie pour le champ électrostatique.	
Si le plan Π est un plan de symétrie de la distribution de charge, alors en deux points M et M' symétrique par rapport au même plan Π, les champs électrostatiques seront symétriques par rapport à Π.	

Le champ électrostatique est inclus dans le plan de symétrie Π : $\vec{E}(M) \in \Pi$	

4.2.2 Plan d'anti-symétrie

Une distribution de charge possède un plan d'anti-symétrie Π^* si Π^* est un plan de symétrie géométrique de la distribution et que les charges sont opposées de chaque côté du plan Π^*. Alors le plan Π^* sera aussi un plan d'anti-symétrie pour le champ électrostatique.	
Si le plan Π^* est un plan de symétrie de la distribution de charge, alors en deux points M et M' symétrique par rapport au même plan Π^*, les champs électrostatiques seront anti-symétriques par rapport à Π^*.	
Le champ électrostatique est perpendiculaire au plan d'anti-symétrie Π^* : $\vec{E}(M) \perp \Pi^*$	

4.3 Invariances de la distribution de charges

4.3.1 Invariance par translation

Une distribution de charges est invariante par translation suivant un axe, si pout tout point P et son translaté P' sa densité de charge vérifie : $\rho(P) = \rho(P')$.

Alors le champ électrostatique sera indépendant de la coordonnée de P selon l'axe de translation.

4.3.2 Invariance par rotation

Une distribution de charges est invariante par rotation autour d'un axe, si la densité de charge est la même en tout point P' obtenu par rotation de P autour de l'axe.

Alors le champ électrostatique sera indépendant de la coordonnée angulaire de P par rapport à l'axe de rotation.

4.3.3 Invariances du champ électrostatique

Propriété :
Le champ électrostatique a les mêmes propriétés d'invariances que la distribution de charges.

Conséquence :
Pour trouver la dépendance aux coordonnées du champ électrostatique, on cherchera donc les invariances de la distribution de charge.

5 Théorème de Gauss

5.1 Flux du champ électrostatique

Définition :
Le flux du champ électrostatique à travers une surface Σ est égal à l'intégrale du champ électrostatique à travers cette surface :

Remarques :
Le flux du champ à travers une surface élémentaire dépend de l'intensité du champ et de l'angle entre la normale à la surface et le champ. Le signe peut être positif ou négatif selon l'orientation.
Déjà vu en première année : flux du champ magnétique

Déjà vu en deuxième année : flux thermique

On s'intéressera ici à des surfaces Σ fermées, c'est-à-dire des surfaces délimitant des volumes.
Exemples :
La sphère et le cube sont des surfaces fermées.
Le cylindre n'en est une que si on le prend d'une hauteur finie et qu'on le ferme par deux disques terminaux.

Propriété :
Lorsqu'une surface Σ est fermée et orientée vers l'extérieur, le flux du champ à travers Σ est qualifié de flux sortant et on le note :

5.2 Cas d'une charge ponctuelle

On considère une charge ponctuelle Q placée en P, qui crée le champ électrostatique en M :

On prend comme surface fermée Σ une sphère de rayon r et de centre P, qui passe donc par le point M.

Calculons le flux du champ à travers cette surface fermée :

Remarque :

On admettra que ce résultat reste valable si la charge n'est plus au centre de la sphère, mais à l'intérieur de celle-ci ; si la surface n'est plus une sphère mais une surface fermée entourant la charge qui crée le champ.

Si la charge se trouve à l'extérieur de la surface fermée, le flux du champ électrostatique sortant sera nul.

5.3 Théorème de Gauss

Théorème de Gauss :

Remarques :

On appelle **surface de Gauss** la surface fermée choisie pour appliquer le théorème de Gauss.

La charge intérieure Q_{int} comprend toutes les charges se trouvant dans la surface de Gauss.

Le théorème de Gauss s'utilisera quand la distribution de charge présente un haut degré de symétrie.

5.4 Topographie du champ électrostatique

On considère un tube de champ délimité par les sections S_1, S_2 et la surface latéraleS_{lat}. On suppose que le champ électrostatique est uniforme sur les sections S_1 et S_2. Aucune charge ne se trouve dans cette zone de l'espace.
Flux du champ :

Si les lignes de champ se resserrent alors :

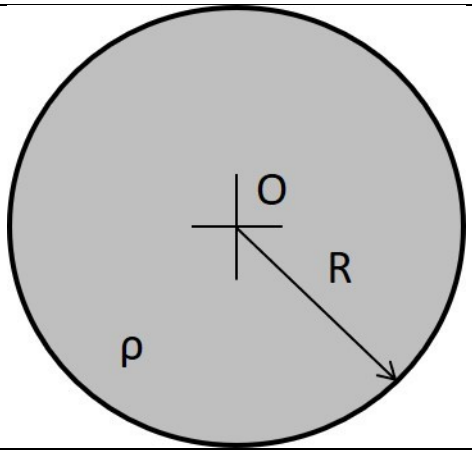
Remarque :
Même raisonnement en mécanique des fluides avec le débit volumique.

6 Distributions à haut degré de symétrie

6.1 Sphère uniformément chargée en volume

On considère une sphère de centre O et de rayon R contenant une densité volumique de charge uniforme ρ. On désire établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace.
On se place dans une base sphérique.

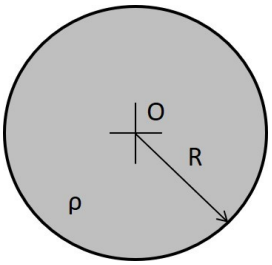
6.1.1 Symétries et invariances



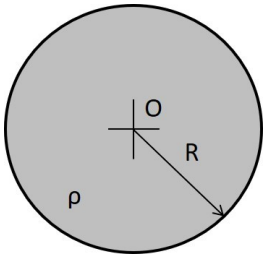
Symétries :

Invariances :

6.1.2 Surface de Gauss



r > R



r < R

6.1.3 Théorème de Gauss

Calcul du flux sortant de Σ :

Calcul de la charge intérieure à Σ :

Soit pour le champ électrostatique :

6.1.4 Graphe du champ électrostatique

6.1.5 Lien avec le champ crée par une charge ponctuelle

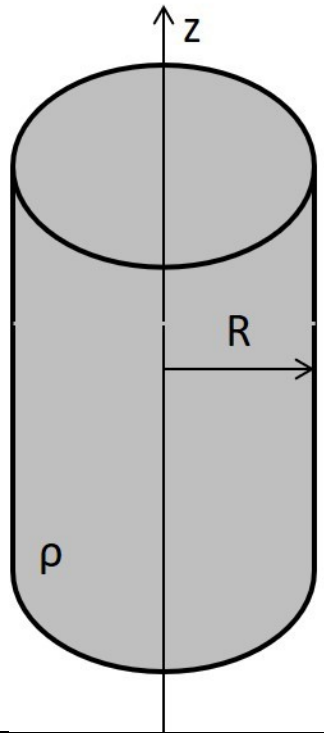
Dans le cas $r > R$, le champ électrostatique peut aussi s'écrire :

Le champ électrostatique créé à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.

6.2 Cylindre « infini » uniformément chargé en volume

On considère un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R contenant une densité volumique de charge uniforme ρ. On désire établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace.
On se place dans une base cylindrique.

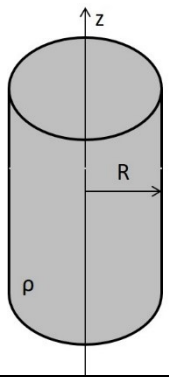
6.2.1 Symétries et invariances



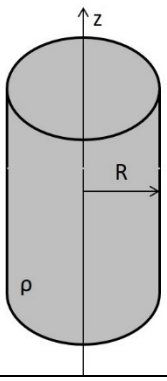
Symétries :

Invariances :

6.2.2 Surface de Gauss



r > R



r < R

6.2.3 Théorème de Gauss

Calcul du flux sortant de Σ :

Calcul de la charge intérieure à Σ :

Soit pour le champ électrostatique :

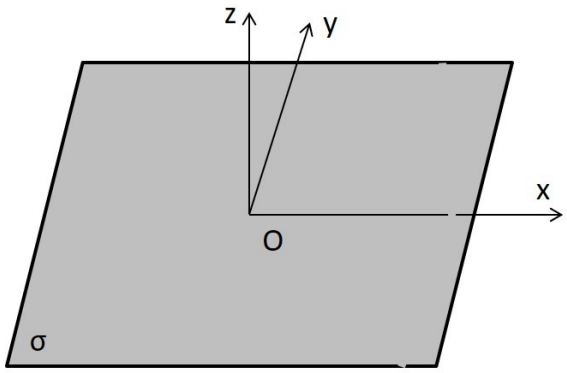
6.2.4 Graphe du champ électrostatique

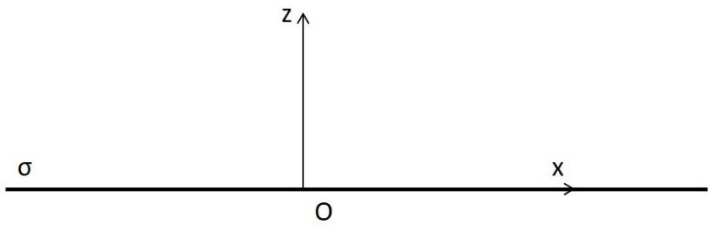
6.3 Plan « infini » uniformément chargé en surface

On considère un plan infini assimilé à xOy contenant une densité surfacique de charge uniforme σ. On désire établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace.

On se place dans une base cartésienne.

6.3.1 Symétries et invariances



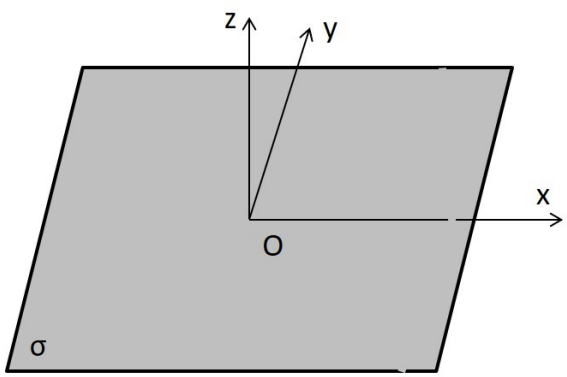


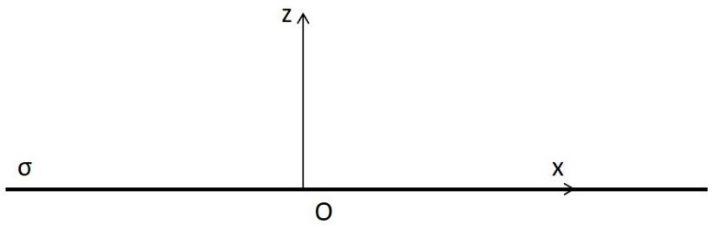
Symétries :

Invariances :

Parité :

6.3.2 Surface de Gauss





6.3.3 Théorème de Gauss

Calcul du flux sortant de Σ :

Calcul de la charge intérieure à Σ :

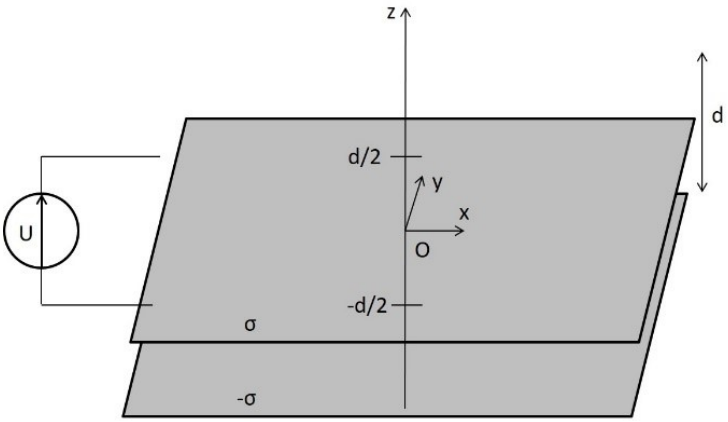
Soit pour le champ électrostatique :

6.3.4 Graphe du champ électrostatique

7 Étude du condensateur plan

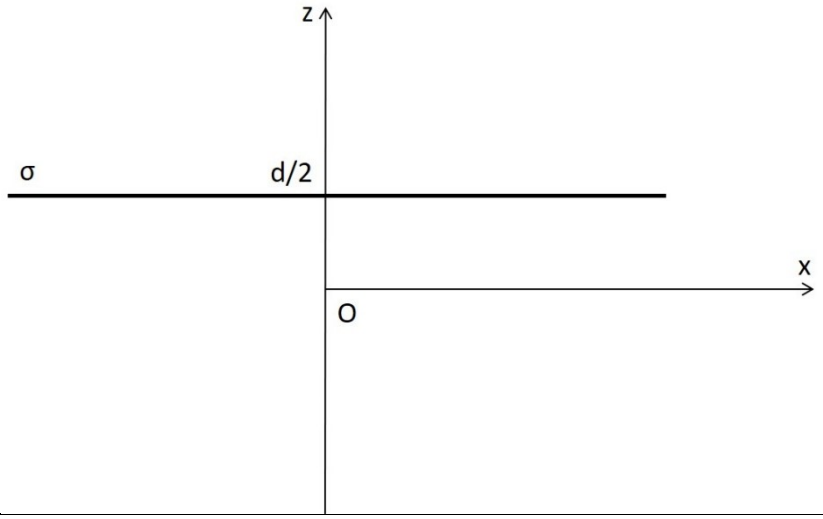
7.1 Description

Un condensateur plan est constitué de deux armatures conductrices qui se font face. Ici, on supposera que ce sont des carrés d'axe Oz et d'aire S séparés par une distance d, appelée écartement. L'écartement est très faible devant les dimensions latérales, ce qui revient à supposer deux plans infinis chargés en surface. L'armature en $z = \frac{d}{2}$ est chargée positivement de densité de charge surfacique σ et l'armature en $z = -\frac{d}{2}$ est chargée négativement de densité de charge surfacique $-\sigma$.
Lorsque ce composant est branché sur un générateur, qui impose une différence de potentiel U entre les deux armatures, un champ électrique apparait dans l'espace inter-armatures.

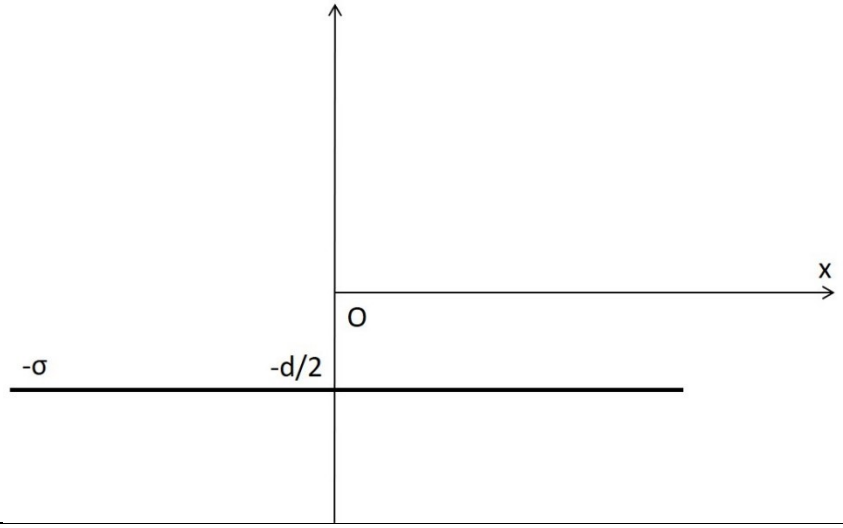


7.2 Champ électrique entre les armatures

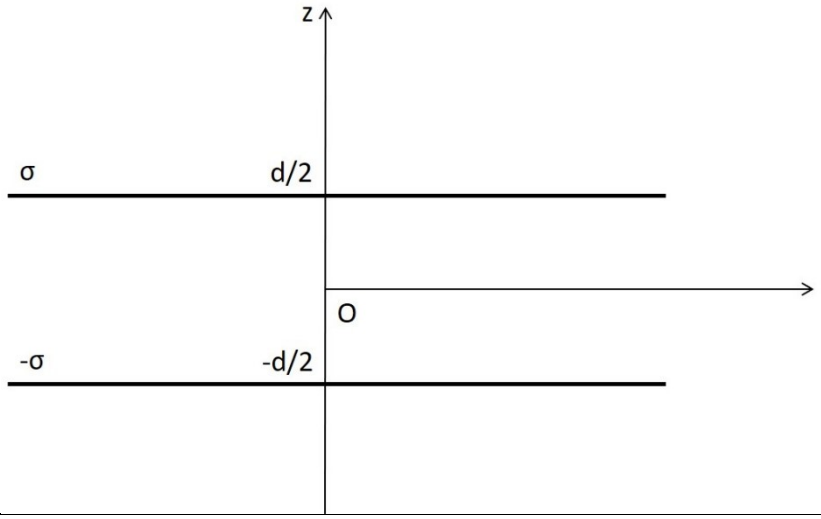
7.2.1 Etude de l'armature supérieure



7.2.2 Etude de l'armature inférieure



7.2.3 Champ électrostatique entre les armatures



7.3 Capacité du condensateur

On peut retrouver la différence de potentiel entre les deux armatures en calculant la circulation du champ électrostatique :

Or, la capacité d'un condensateur est définie par :

avec Q : charge portée par l'armature supérieure telle que

Propriété :
Dans un condensateur plan, la capacité est égale à :

Remarques :
Augmenter la valeur d'une capacité permet, pour une différence de potentiel donnée, d'accroître la valeur de la charge.
Un condensateur dont les armatures ont une surface de l'ordre du cm² et sont écartées d'un dixième de millimètre atteignent dans l'air une capacité inférieure à la dizaine de picofarad.
Il faut donc accroître l'aire des surfaces en regard et diminuer l'épaisseur. Ceci dépendant de l'encombrement. Il faut aussi éviter le court-circuit. Il est possible de jouer sur la forme : enrouler deux conducteurs permet par exemple d'obtenir des surfaces beaucoup plus grandes dans un volume donné.
Il est aussi possible d'utiliser un matériau isolant de permittivité ε plus élevée que celle du vide ou de l'air. Ainsi, on a dans le cas du condensateur plan : $C = \frac{\varepsilon S}{d}$.

8 Questions de cours

1) **Donner la loi de Coulomb en expliquant tous les termes entrant dans sa composition.**
2) **Donner l'expression du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle. Quelle est son unité ?**
3) **Donner deux relations entre champ électrostatique et potentiel électrostatique. L'une utilisera une notation intégrale et l'autre locale.**
4) **Donner la valeur du potentiel électrostatique créé au point M par une charge ponctuelle.**
5) **Donner l'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur.**
6) **Définir les notions suivantes : lignes de champ, tubes de champ et surfaces équipotentielles. Donnez-en quelques propriétés.**
7) **Donner la définition des densités volumiques, surfaciques et linéiques de charge.**
8) **Donner le principe de Curie. Définir les notions de plans de symétrie et d'anti-symétrie pour la distribution de charges. Quelle est la conséquence pour le champ électrostatique ?**
9) **Citer deux types d'invariances de la distribution de charge et leur conséquence sur le champ électrostatique.**
10) **Enoncer le théorème de Gauss.**
11) **Etablir l'expression du champ électrostatique créé par une sphère de centre O et de rayon R contenant une densité volumique de charge uniforme ρ.**
12) **Redémontrer l'expression du champ électrostatique créé par un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R contenant une densité volumique de charge uniforme ρ.**
13) **Redémontrer l'expression du champ électrostatique créé par un plan infini assimilé à xOy contenant une densité surfacique de charge uniforme σ.**
14) **Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide, le condensateur étant composé de deux plan infini chargés surfaciquement, de charges opposées.**

9 Exercices type oral

9.1 Vitesse d'un électron en orbite circulaire

En 1913, le physicien danois Niels Bohr imagine un modèle « planétaire » de l'atome afin d'expliquer les raies émises par des atomes d'hydrogène excités. Ce modèle, aujourd'hui obsolète, ne permit pas d'expliquer les spectres des autres atomes.

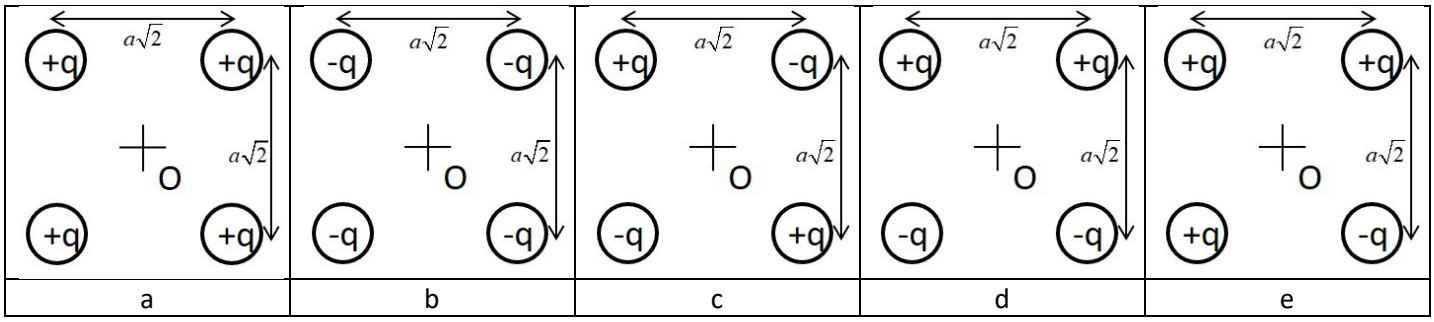
Dans le modèle de Bohr, l'atome d'hydrogène est un système à deux corps ponctuels constitué d'un noyau, le proton de masse m_p et charge électrique $+e$, et d'un électron M, de masse m_e et de charge $-e$. Le proton est considéré comme fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen $\left(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$ où l'origine O correspond au noyau de l'atome.

1) Montrer que le mouvement circulaire de l'électron autour du noyau est uniforme et exprimer sa vitesse v en fonction de r, e, m_e et ε_0.

2) Pourquoi ce modèle est-il qualifié de « planétaire » ? Retrouver alors la vitesse d'un satellite de masse m_s en mouvement circulaire de rayon r autour de la Terre de masse M_T. On introduira G, la constante gravitationnelle.

9.2 Carré de 4 charges

Soit 4 charges disposées à chaque somment d'un carré de côté $a\sqrt{2}$. On étudiera les cas suivants :



1) Donner la direction du champ créé en O centre du carré.

2) Calculer le potentiel créé en O.

3) Calculer le potentiel sur l'axe dans le cas (a), puis le champ sur l'axe.

9.3 Relation potentiel-champ

Dans l'espace muni d'un repère cartésien (O, x, y, z) un champ électrique est défini par son potentiel :

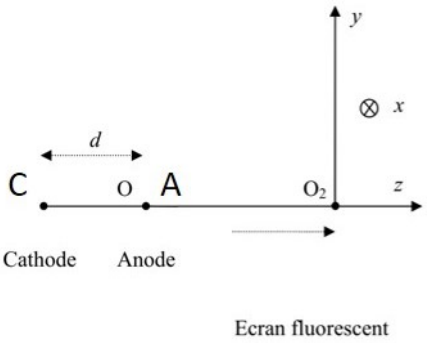
$$\begin{cases} V(x,y,z) = -E_0 \frac{x^2}{2a} \ pour \ -a \le x \le a \\ V(x,y,z) = -E_0 x + E_0 \frac{a}{2} \ pour \ x > a \\ V(x,y,z) = E_0 x + E_0 \frac{a}{2} \ pour \ x < -a \end{cases}$$ où E_0 est une constante

1) Exprimer le champ dans les différents domaines.

2) Peut-on parler de champ uniforme ?

9.4 Etude d'un canon à électrons d'un oscilloscope cathodique (CCP TSI 2014)

Une cathode, notée C, émet des électrons de vitesse initiale négligeable. On établit entre la cathode C et une anode, notée A, une différence de potentiel notée $U_{AC} = V_A - V_C > 0$. Les électrons sont ainsi accélérés lors de leur parcours entre C et A. La distance entre C et A est notée d.



1) Déterminer, en un point de l'axe z situé entre la cathode et l'anode, la direction et le sens du champ électrique $\vec{E}$ crée par la tension U_{AC}. Exprimer $\left\|\vec{E}\right\|$ en fonction de U_{AC} et d.

2) Déterminer l'expression de la force électrostatique $\vec{f}$ subie par un électron entre C et A en fonction de U_{AC}, d, e (charge élémentaire) et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

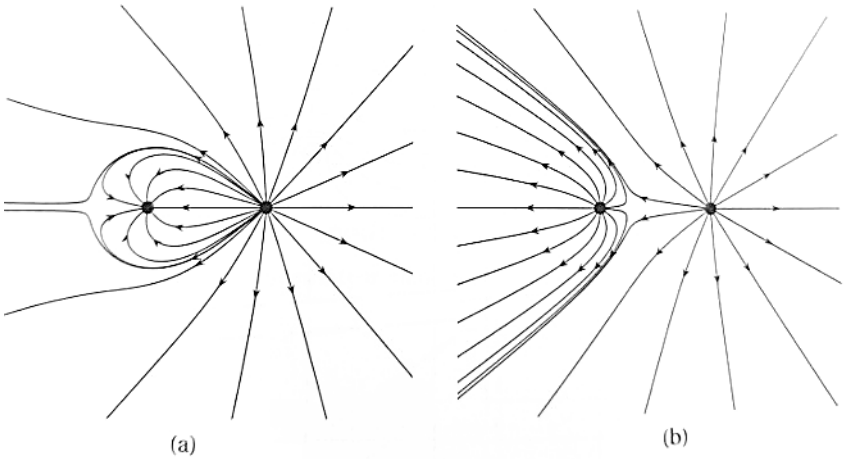
3) La tension U_{AC} appliquée est de l'ordre de 1kV. La distance d est de l'ordre de 0,1m. Le poids des électrons peut-il être négligé devant la force électrostatique précédente ? Justifier quantitativement la réponse apportée.

4) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'expression de la vitesse v_0 avec laquelle les électrons atteignent l'anode. Exprimer v_0 en fonction de U_{AC}, m_e et e. Déterminer l'ordre de grandeur de la valeur numérique de la vitesse v_0.

Données : - Charge élémentaire : $e = 1{,}6.10^{-19}C$

- Masse de l'électron : $m_e = 9{,}1.10^{-31}kg$

9.5 Cartes de champ



Les cartes de champ (a) et (b) représentent le champ crée par deux charges ponctuelles notées q_1 et q_2.

1) Déterminer dans chaque cas le signe des charges.

2) Tracer les équipotentielles.

9.6 Forces intermoléculaires

Le cours de TSI1 présente les liaisons physiques et interactions entre entités en se basant sur l'existence de forces intermoléculaires. Il y est notamment dit :

« Soit deux ions de charges respectives $z_1 e$ et $z_2 e$ distants de r, l'énergie d'interaction entre eux s'écrit :

$$U(r) = \frac{z_1 e z_2 e}{(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r)r}$$

Cette interaction peut être attractive ou répulsive. »

Commenter.

9.7 Etude de distributions continues de charges

Soit les distributions de charges :

A) un cylindre de rayon r et de hauteur h chargé uniformément en volume de densité volumique de charge ρ

B) une sphère de rayon r chargée uniformément en volume de densité volumique de charge ρ

C) un plan carré de côté a chargé uniformément en surface de densité surfacique de charge σ

D) une sphère de rayon r chargée uniformément en surface de densité surfacique de charge σ

E) deux plans parallèles carrés de côté a d'équations respectives $z = a/2$ et$z = -a/2$, entre lesquels se trouve une distribution volumique de charge uniforme de valeur ρ

F) un fil de longueur h chargé uniformément de densité linéique de charge λ.

Pour chaque distribution :

1) Déterminer la charge totale contenue dans ces distributions.

2) Déterminer les plans de symétrie de ces distributions. On supposera les distributions infinies si nécessaire et les conditions pour pouvoir faire ces suppositions. En déduire sur la direction du champ électrostatique en un point M de l'espace.
3) Déterminer de quelles coordonnées dépend le champ électrostatique.
4) Préciser la nature géométrique des lignes de champ et des surfaces équipotentielles.

9.8 Condensateur sphérique

On suppose que la charge est répartie en surface des armatures.
1) Déterminer le champ électrostatique crée en tout point de l'espace par un condensateur sphérique d'armatures concentriques de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. On supposera que la charge Q est portée par l'armature intérieure et $-Q$ par l'armature extérieure.
2) En déduite la différence de potentiel $V_1 - V_2$ où V_1 correspond au potentiel électrostatique de l'armature intérieure et V_2 celui de l'armature extérieure.
3) Calculer la capacité de ce condensateur. Comparer à l'expression de la capacité d'un condensateur plan quand la distance d entre les deux armatures devient très faible devant leur rayon.

9.9 Condensateur cylindrique

On suppose que la charge est répartie en surface des armatures.
1) Déterminer le champ électrostatique crée en tout point de l'espace par un condensateur cylindrique d'armatures coaxiales de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. On supposera que la charge Q est portée par l'armature intérieure et $-Q$ par l'armature extérieure.
2) En déduite la différence de potentiel $V_1 - V_2$ où V_1 correspond au potentiel électrostatique de l'armature intérieure et V_2 celui de l'armature extérieure.
3) Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique d'armatures coaxiales de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. Comparer à l'expression de la capacité d'un condensateur plan quand la distance d entre les deux armatures devient très faible devant leur rayon.

10 Capacité numérique pour le 05/12/2022

10.1 Objectif

A l'aide d'un langage de programmation, tracer quelques lignes de champ et lignes équipotentielles pour une distribution donnée.

Utiliser les fonctions de base (**contour** et **streamplot**) de la bibliothèque matplotlib (leurs spécifications étant fournies) pour représenter des lignes de niveau ou des lignes de champs.

10.2 Hypothèses

Tout au long de cette étude, nous nous placerons dans le plan xOy.

On souhaite calculer puis tracer le potentiel $V(x,y)$ et champ électrostatiques $\vec{E} = E_x(x,y)\overrightarrow{u_x} + E_y(x,y)\overrightarrow{u_y}$ créés par un électron de charge $q = -1{,}6.10^{-19}\ C$ placé en $O(x_O, y_O)$.

10.3 Programme Python

Le code peut être consulté au lien suivant : https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/27e3-1046264

10.3.1 Déclaration des charges

Pour pouvoir adapter le programme facilement au tracé de lignes de champ avec des répartitions de charges différentes, on va définir l'ensemble des objets chargés qui engendrent le champ en représentant chaque objet chargé par un triplet (x, y, q), où (x, y) sont les coordonnées de l'objet et q est la charge électrique de l'objet en Coulombs, positive ou négative.

```
1  def ajouter_objet(x,y,q):
2      objets.append([x,y,q])
3
4  q_charge = - 1.6*10**(-19)
5  ajouter_objet(0, 0, q_charge)
6  no = len(objets)
```

1) D'après le code précédent, quelles sont les coordonnées (x_O, y_O) de la charge ?

10.3.1.1 Maillage de l'espace

On veut tracer les équipotentielles et les lignes de champ dans un carré de côté L. Pour cela, on va découper la surface sur laquelle on trace les lignes de champ en petits éléments de surface carrée de côté a. Cette étape s'appelle le maillage. Les grandeurs physiques $V(x,y)$, $E_x(x,y)$ et $E_y(x,y)$ seront alors représentées comme des matrices de taille $L/a \times L/a$ qui contiennent les valeurs des grandeurs en chaque point du maillage. Ceci peut être fait à l'aide de la fonction **meshgrid** de numpy qui crée une grille rectangulaire à partir de deux tableaux unidimensionnels.

```
1  L = 10**(-10)
2  a = L / 100
3  x = np.linspace(- L/2, L/2, int(L/a))
4  y = np.linspace(- L/2, L/2, int(L/a))
5  X, Y = np.meshgrid(x,y)
6
7  nM = len(X)
```

2) D'après le code précédent, quelles sont les valeurs de L et a ? Quelle sera alors la taille de la matrice X (ou celle de Y) ? Commenter le choix de L.

10.3.1.2 Calcul du potentiel

3) Rappeler l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ crée par une charge ponctuelle q placée en $O(x_O, y_O)$ en un point $M(x_M, y_M)$ en fonction de q, ε_0 et OM, puis en fonction de q, ε_0, x_O, y_O, x_M et y_M.

On écrit une fonction **calculV**(xM, yM, q, xO, yO) permettant de calculer au point M de coordonnées (x_M, y_M) le potentiel créé par la charge q placée au point O de coordonnées (x_O, y_O).

Dans la suite, pour calculer le potentiel créé par la répartition de charges, il faudra faire appel à la fonction **calculV** pour chaque objet chargé contenu dans la liste objets et calculer le potentiel en chaque point du maillage.

```
1  V = np.zeros((nM,nM))
2
3  def calculV(xM,yM,q,xO,yO):
4      if xM == xO and yM == yO :
5          return 0
6
7      else :
8          return q/(4*np.pi*e_0)*1/((xM-xO)**2+(yM-yO)**2)**(1/2)
9
10 for i in range(0,nM) :
11     for j in range (0,nM):
12         for k in range(0,no):
13             V[i,j] = V[i,j] + calculV(x[i], y[j], objets[k][2], objets[k][0], objets[k][1])
```

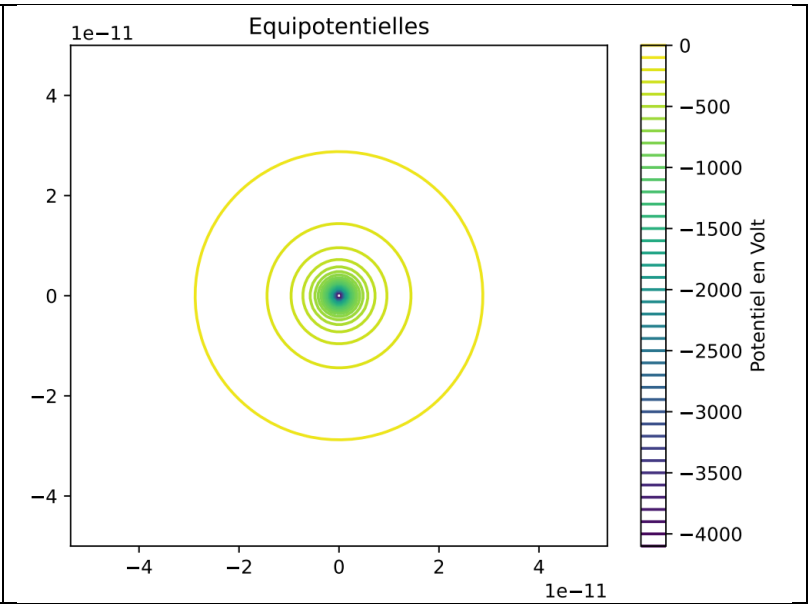
4) Pourquoi traite-on à part le cas $x_M = x_O$ et $y_M = y_O$?

5) Expliquer la ligne 13.

10.3.1.3 Tracé des équipotentielles

Pour tracer les équipotentielles, on peut utiliser la fonction **contour** de matplotlib.pyplot. On obtient le résultat suivant :

```
1  plt.close()
2  plt.figure(1)
3  schema = plt.contour(X, Y, V, 40)
4
5  cbar = plt.colorbar()
6  cbar.set_label("Potentiel en Volt")
7  plt.axis("equal")
8  plt.title("Equipotentielles")
9  plt.show()
```



6) Expliquer la forme des surfaces équipotentielles obtenues.

10.3.1.4 Calcul du champ électrique

Les coefficients de la matrice donnant les composantes du champ électrique en chaque point du maillage sont obtenus à partir des coefficients de celle donnant le potentiel grâce à un schéma d'Euler explicite.

7) Connaissant le potentiel électrostatique en M, comment peut-on en déduire le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en ce point ? On donnera la formule en faisant apparaître deux dérivées partielles mais sans essayer de résoudre l'équation.

8) Rappeler la méthode d'Euler explicite et exprimer la composante du champ électrostatique suivant x, E_x, en fonction de $V(x+a,y)$, $V(x,y)$ et a. Faire de même pour la composante du champ électrostatique suivant y, E_y, en fonction de $V(x,y+a)$, $V(x,y)$ et a.

```
1  Ex = np.zeros((nM - 1, nM - 1))
2  Ey = np.zeros((nM - 1, nM - 1))
3
4  for i in range (0, nM-2) :
```

```
5       for j in range (0, nM-2) :
6           Ex[i,j] = - (V[i,j+1] - V[i,j]) / a
7           Ey[i,j] = - (V[i+1,j] - V[i,j]) / a
```

9) Comparer la taille des matrices E_x et E_y en fonction de celle de la matrice V. Expliquer.

10.3.1.5 Tracé des lignes de champs

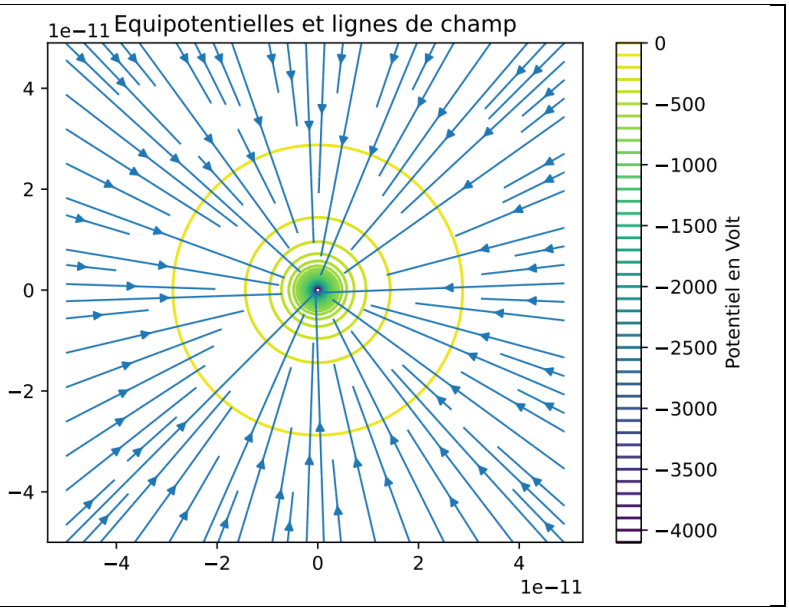
Avant de procéder au tracé, il faut ajuster les tailles de la matrice donnant les valeurs de V et de celle donnant les coordonnées des points du maillage à celles donnant E_x et E_y.

```
1   Vajust = np.zeros((nM - 1, nM - 1))
2   for i in range (0, nM - 1) :
3       for j in range (0, nM - 1) :
4           Vajust[i,j] = V[i,j]
5
6   Xajust = np.zeros((nM - 1, nM - 1))
7   for i in range (0, nM - 1):
8       for j in range (0, nM - 1):
9           Xajust[i,j] = X[i,j]
10
11  Yajust = np.zeros((nM - 1, nM - 1))
12  for i in range (0, nM - 1):
13      for j in range (0, nM - 1):
14          Yajust[i,j] = Y[i,j]
```

Pour tracer les lignes de champ, on peut utiliser la fonction **streamplot** de matplotlib.pyplot et superposer aux équipotentielles. On obtient le résultat suivant :

```
1   plt.close()
2   plt.figure(2)
3   schema = plt.contour(Xajust, Yajust, Vajust,
4   40)
5
6   cbar = plt.colorbar()
7   cbar.set_label("Potentiel en Volt")
8   plt.axis("equal")
9   plt.title("Equipotentielles et lignes de
10  champ")
11
12  schema = plt.streamplot(Xajust, Yajust, Ex,
    Ey, linewidth=1, density=1)

    plt.show()
```



10) Comparer la forme des lignes de champ, leur orientation par rapport aux surfaces équipotentielles.

11 DM pour le 12/12/2022

Données pour tout le problème :

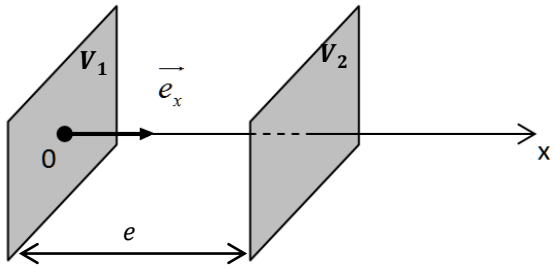
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 9{,}0.10^{-12}$ F.m^{-1}
- Permittivité relative du gazole : $\varepsilon_r = 5{,}0$
- Hauteur du capteur capacitif : $H = 1{,}0$ m
- Largeur du capteur capacitif : $L = 4{,}0$ cm
- Distance entre les armatures : $e = 3{,}0$ mm

Composition d'opérateurs :

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right) = \Delta f \quad \text{avec} \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

A / Champ électrostatique d'un condensateur plan

Figure 1



Considérons deux plaques métalliques planes, de surface S, perpendiculaires à l'axe (Ox), caractérisées par les abscisses respectives $x = 0$ et $x = e$ et portées respectivement aux potentiels V_1 et V_2 (Figure 1).

Nous supposerons que les dimensions transversales de ces plaques sont assez grandes pour pouvoir négliger les effets de bord. Ainsi nous supposerons que le potentiel entre les deux plaques ne dépend que de x et s'écrit $V(x)$.
En outre, on suppose que ces deux plaques constituent un condensateur : l'espace entre ces 2 armatures est vide et elles portent des charges électriques opposées réparties en surface ($Q_2 = -Q_1$ avec Q_2 charge portée par la plaque d'abscisse $x = e$).

1. En ne considérant que le plan portant la charge Q_1 en $x = 0$, et en précisant la surface de Gauss utilisée, établir rigoureusement l'expression du champ électrostatique créé dans la zone $x > 0$, en fonction de Q_1, S et ε_0 où ε_0 est la permittivité du vide.
2. Par analogie et par des considérations de symétries, donner l'expression du champ électrostatique créé par le plan portant la charge Q_2 dans la zone $x < e$.
3. Etablir alors l'expression du champ électrostatique total présent uniquement entre les deux plaques en fonction de Q_1, S et ε_0 où ε_0 est la permittivité du vide.
4. Déduire de vos résultats précédents l'expression de la capacité C_0 du condensateur plan à l'aide de e, S et ε_0.

B / Capacité du capteur

On souhaite mesurer la hauteur h de gazole dans une citerne à l'aide d'un capteur capacitif. Ce dernier peut être assimilé à un condensateur plan de capacité $C(h)$, fonction de h et constitué de deux armatures rectangulaires en cuivre de hauteur H, de largeur L et distantes de e (Figure 2).
H correspond également à la hauteur maximale de gazole dans la citerne. L'espace entre les armatures est rempli en partie de gazole sur une hauteur h et en partie d'air (assimilé au vide).

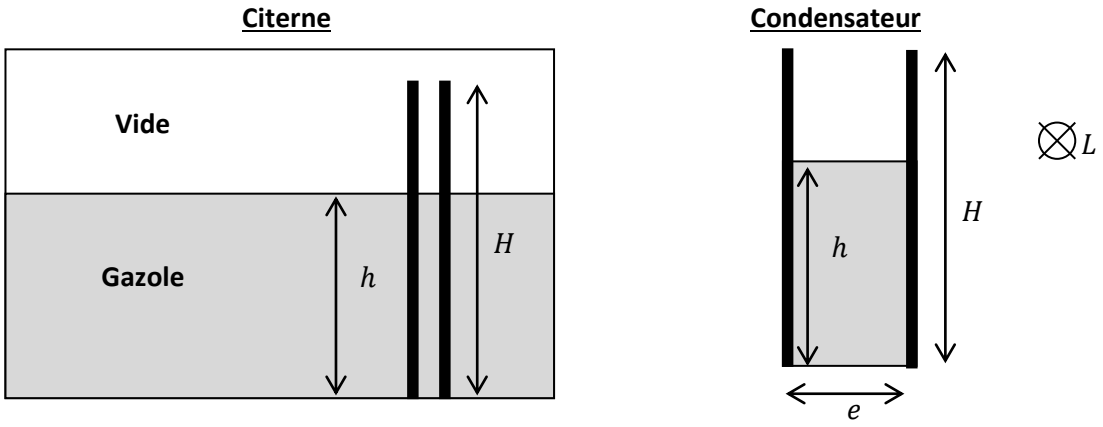


Figure 2

On admet que la capacité d'un condensateur plan rempli d'un isolant de permittivité relative ε_r vaut $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e}$.

5. Montrer que l'association en parallèle de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 est équivalente à un seul condensateur de capacité $C_{éq} = C_1 + C_2$.

6. En considérant le condensateur formé de vide et de gazole, déduire l'expression de $C(h)$ en fonction de $h, H, L, e, \varepsilon_r$ (permittivité relative du gazole) et ε_0.

7. Vérifier que $C(h)$ peut s'écrire numériquement suivant la formule suivante :

$$C(h) = 120 \times (1{,}0 + 4{,}0\, h) \text{ avec } C(h) \text{en p}F \text{ et } h \text{ en m}$$

8. Calculer les valeurs $C_{\min}$ et $C_{\max}$ de $C(h)$ quand la citerne est respectivement vide et pleine.