Propagation

Extrait du programme de TSI2

La partie 4.4 « Propagation », articulée autour des ondes électromagnétiques, est l'occasion d'illustrer l'efficacité du formalisme local des équations de Maxwell en insistant sur les aspects qualitatifs et sur la variété des applications qui en découlent. Quelques aspects énergétiques associés à la propagation d'une onde plane dans l'espace vide de charge et de courant sont abordés ; les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique ne sont pas étudiés.

La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait et son confinement dans une cavité permettent aux étudiants d'aborder la notion d'onde stationnaire et de découvrir des savoir-faire spécifiques permettant leur étude efficace.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.4 Propagation	
Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant ; onde plane progressive.	Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension cartésienne. Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant.
Densité volumique d'énergie électromagnétique, vecteur de Poynting et bilan d'énergie.	Citer et utiliser les expressions du vecteur de Poynting et de l'énergie électromagnétique volumique associés à un champ électromagnétique, en se limitant à des cas simples. Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée pour une onde plane. Effectuer un bilan d'énergie sous forme globale pour une onde plane dans l'espace vide de charge et de courant.
Onde plane progressive monochromatique.	Expliquer le caractère idéal du modèle de l'onde plane progressive monochromatique. Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
Exemple d'états de polarisation d'une onde plane progressive et monochromatique : polarisation rectiligne. Polariseurs rectilignes.	Identifier l'expression d'une onde plane polarisée rectilignement. **Mettre en évidence une polarisation rectiligne.**
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire.	Exploiter la nullité (admise) des champs dans un métal parfait. Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant la relation de passage du champ électrique fournie. Caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension cartésienne. Mode d'onde stationnaire.	Établir la condition de quantification des solutions. **Mettre en oeuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique dans le domaine des ondes centimétriques.**

Mesures et capacités expérimentales

Nature et méthodes	Capacités exigibles
2. Électricité	
Onde électromagnétique	Mettre en oeuvre un détecteur dans le domaine des ondes centimétriques.

Sommaire

1 EQUATION DE PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE 3

2 ONDE PLANE DANS L'ESPACE VIDE DE CHARGE ET DE COURANT 5

2.1 RESOLUTION GENERALE D'UNE EQUATION D'ONDE SCALAIRE A UNE DIMENSION 5
2.2 SOLUTIONS DE L'EQUATION DE PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE SOUS FORME D'ONDES PLANES PROGRESSIVES 7
2.3 ASPECT ENERGETIQUE 10

3 ONDE PLANE PROGRESSIVE MONOCHROMATIQUE 12

3.1 RETOUR SUR L'EQUATION D'ONDE SCALAIRE 12
3.2 APPLICATION AU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE 14
3.3 ETATS DE POLARISATION D'UNE ONDE PLANE PROGRESSIVE (MONOCHROMATIQUE) 16
3.4 ASPECT ENERGETIQUE 19

4 REFLEXION SOUS INCIDENCE NORMALE D'UNE OPPM POLARISEE RECTILIGNEMENT SUR UN PLAN CONDUCTEUR PARFAIT 20

4.1 HYPOTHESES 20
4.2 REFLEXION SUR UN CONDUCTEUR PARFAIT 21
4.3 SUPERPOSITION DES ONDES 22
4.4 ASPECT ENERGETIQUE 24

5 APPLICATIONS AUX CAVITES A UNE DIMENSION 25

5.1 POSITION DU PROBLEME 25
5.2 MODE D'ONDE STATIONNAIRE 25

6 METTRE EN ŒUVRE UN DISPOSITIF PERMETTANT D'ETUDIER UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE DANS LE DOMAINE DES ONDES CENTIMETRIQUES 26

6.1 MATERIEL 26
6.2 DESCRIPTION DETAILLEE DU DISPOSITIF 26
6.3 MANIPULATIONS 27

7 QUESTIONS DE COURS 29

8 EXERCICES D'APPLICATIONS DIRECTES DU COURS 30

8.1 ONDE PROGRESSIVE 30
8.2 CHAMP ELECTROMAGNETIQUE 30
8.3 ONDE PLANE PROGRESSIVE MONOCHROMATIQUE ET NOTATION COMPLEXE 30
8.4 REFLEXION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE SUR UN CONDUCTEUR PARFAIT 31

9 EXERCICES TYPE ORAL 32

9.1 SUPERPOSITION DES DEUX ONDES PLANES PROGRESSIVES MONOCHROMATIQUES 32
9.2 CAVITE RESONANTE 32

10 EXERCICES TYPE ECRIT (A RENDRE EN DM POUR LE 30/01/2023) 33

1 Equation de propagation du champ électromagnétique

1) Dans le vide, en absence de charges et courants, comment peut-on simplifier les équations de Maxwell ?

2) A partir des équations de Maxwell, montrer qu'il est possible de relier les dérivées temporelles du champ électriques à ses dérivées spatiales. On pourra utiliser l'identité vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{a})\right) = \overrightarrow{grad}\big(div(\vec{a})\big) - \vec{\Delta}(\vec{a})$$

3) Faire de même pour le champ magnétique.

<u>Propriété</u> :
Dans le vide, dans une région sans charges ni courants, les champs électrique et magnétique satisfont la même équation de propagation ou équation d'onde, appelée **équation de d'Alembert** :

4) Montrer que $\mu_0\varepsilon_0$ est homogène à l'inverse d'une vitesse au carré.

<u>Remarque</u> :
La grandeur $\mu_0\varepsilon_0$ est homogène à l'inverse d'une vitesse au carré. On l'appelle la **célérité** de l'onde ou la **vitesse de propagation** de l'onde. Dans le vide, elle est égale à :

L'onde électromagnétique se propage donc dans le vide à la vitesse de la lumière. On retiendra :

<u>Remarque</u> :
Cette équation intervient souvent en physique : en électromagnétisme, en mécanique (cordes vibrantes), en acoustique (ondes sonores), en mécanique des fluides (phénomènes de houle), en électricité (lignes électriques), en thermodynamique (transferts de chaleurs), …

2 Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant

2.1 Résolution générale d'une équation d'onde scalaire à une dimension

On suppose dans un premier temps que le champ électrique se propage à la vitesse de propagation v et peut se mettre sous la forme suivante : $\vec{E}(M,t) = s(M,t)\vec{u}$

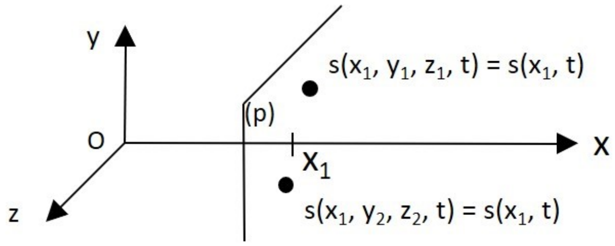
5) Ecrire l'équation d'onde à laquelle satisfait $s(M,t)$.

2.1.1 Onde plane progressive (OPP)

Définition :
On dit qu'une onde est **plane** si, à chaque instant, la fonction $s(x,y,z,t)$ a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à une direction fixe définie par un vecteur unitaire $\vec{n}$ et appelée **direction de propagation**.

Exemple :

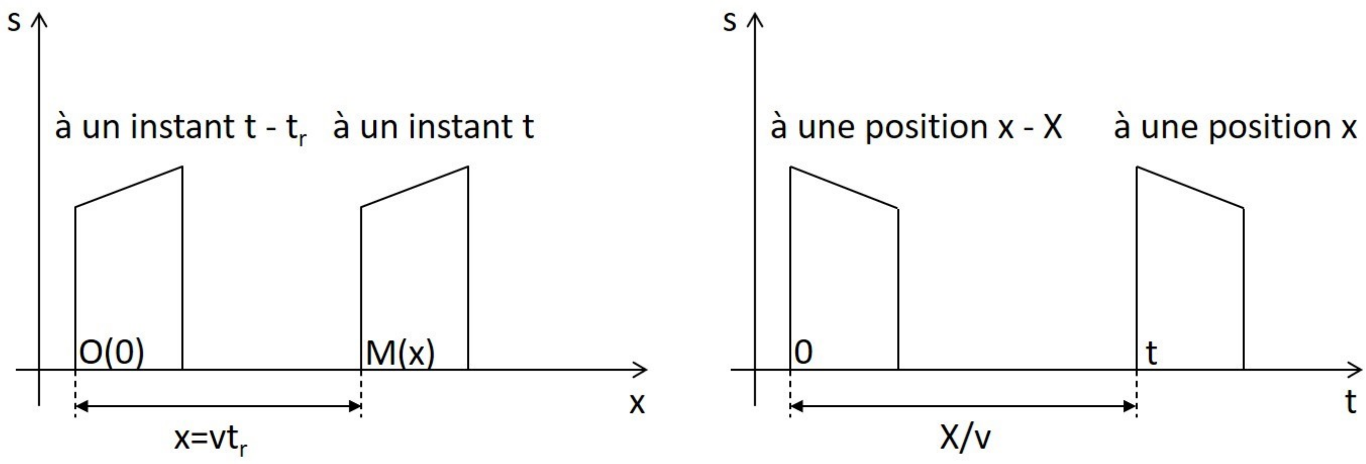
En coordonnées cartésiennes, la fonction $s(x,y,z,t)$ décrit une onde plane si, par exemple, elle se propage selon x et est indépendante de y et z. Elle ne dépend donc que d'une coordonnée, x et du temps, t : soit $s(x,t)$



Remarque :
Dans le cas d'une propagation unidimensionnelle, l'onde est forcément plane : cas des ondes étudiées en TSI1.

Définition :
L'onde plane est de plus **progressive** quand le signal se propage dans un sens déterminé.

Exemple :
En coordonnées cartésiennes, l'onde plane précédente est progressive si elle se propage selon les x croissants ou les x décroissants. Supposons qu'elle se propage à la vitesse constante, v, selon les x croissants.



La durée de propagation entre 0 et x est de t_r : $s(x,t) = s(0, t - t_r) = s\left(0, t - \frac{x}{v}\right)$

$t_r = \frac{x}{v}$ représente le retard temporel.

Ou bien entre 0 et t , l'onde se propage de $x - X$ à x : $s(x,t) = s(x - X, 0) = s(x - vt, 0)$

Si le signal se propage suivant les x croissants à la vitesse constante v, la variable est $x - vt$ ou $t - \frac{x}{v}$.

Remarque :

Si le signal se propage suivant les x décroissants à la vitesse constante v, la variable devient $x+vt$ ou $t+\frac{x}{v}$.

2.1.2 Solution de l'équation de propagation

On adoptera donc pour la suite une propagation de l'onde selon x, soit la fonction scalaire $s(x,t)$, solution de l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0$$

6) Montrer que les solutions de cette équation d'onde peuvent s'écrire comme la superposition de deux ondes planes progressives tel que :

$$s(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{v}\right)$$

Propriété :

Les solutions de l'**équation de propagation unidimensionnelle** selon x peuvent s'écrire comme la superposition de deux **ondes planes progressives** :

2.2 Solutions de l'équation de propagation du champ électromagnétique sous forme d'ondes planes progressives

2.2.1 Equation de propagation unidimensionnelle

On suppose que nos champs ne dépendent que de la coordonnées cartésiennes, x.

7) Simplifiez l'expression de l'équation de propagation auxquelles obéissent les champs électriques et magnétiques.

8) En déduire l'expression des champs électriques et magnétiques.

9) Pour simplifier les calculs futurs de ce cours, on suppose que la propagation se fait selon les x croissants. Simplifier les champs en conséquence.

2.2.2 Transversalité des champs

10) En partant de l'équation de Maxwell-Gauss, montrer que la composante suivant $\overrightarrow{u_x}$ du champ électrique est forcément nulle.

11) Que pouvez-vous alors en conclure pour le champ magnétique ?

<u>Propriété</u> :
Les champs électrique et magnétique n'ont pas de composantes suivant la direction de propagation. Les vecteurs sont perpendiculaires à la direction de propagation, on les qualifie de **transverses**.

<u>Remarque</u> :
On peut donc réécrire les champs sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix} \quad et \quad \vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$$

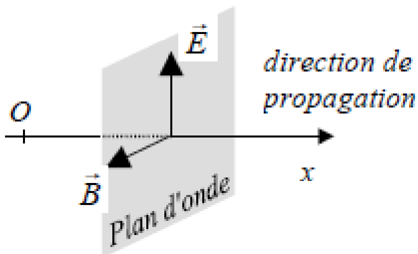
2.2.3 Relation entre les champs

12) En partant de l'équation de Maxwell-Faraday, et en développant l'expression du rotationnel dans la base cartésienne, montrer que les champs électriques et magnétiques sont reliés par la relation :

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\overrightarrow{u_x} \wedge \vec{E}$$

Propriété :

Pour une onde plane progressive de direction de propagation donnée par le vecteur unitaire $\vec{n}$, les champs électrique et magnétique sont **transverses**. Ils forment avec la direction de propagation un trièdre direct. On a alors la relation de structure suivante :



2.3 Aspect énergétique

2.3.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Définition :
Les champs électrique et magnétique régnant dans une portion de l'espace vide entraînent la localisation d'une énergie dont la densité volumique, u (J.m^{-3}), s'écrit :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

13) D'après la relation de structure, comment peut-on relier la norme du champ magnétique à celle du champ électrique ? En déduire une expression simplifiée de la densité volumique d'énergie électromagnétique.

Propriété :
La densité volumique d'énergie électromagnétique est équirépartie entre terme électrique et terme magnétique.

Remarque :
Soit un volume fini V de l'espace délimité par une surface fermée S, à un instant t l'énergie électromagnétique U contenue dans ce volume est : $U = \iiint_V u d\tau$
La diminution de cette énergie peut se retrouver sous deux formes :
- puissance cédée à la matière, P (ou aux porteurs de charges)
- puissance évacuée à travers S sous forme de rayonnement, $P_{rayonnée}$

On peut donc écrire la diminution de l'énergie électromagnétique sous la forme :

$$-\frac{dU}{dt} = P + P_{rayonnée}$$

2.3.2 Puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charge

14) Quelle est la puissance cédée aux porteurs de charge dans le cadre de ce cours ?

Propriété :
Dans l'espace vide de charges et de courants, la conservation de l'énergie électromagnétique se traduit par le bilan suivant :

$$-\frac{dU}{dt} = P_{rayonnée}$$

2.3.3 Puissance rayonnée

Définition :
Le vecteur densité de courant d'énergie rayonnée ou **vecteur de Poynting** représente la densité surfacique de puissance rayonnée et s'écrit :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

15) En utilisant la relation de structure, simplifier l'expression du vecteur de Poynting dans le cas des OPP se propageant selon les x croissants. On pourra utiliser l'identité vectorielle suivante :

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$$

16) Représenter alors les vecteurs champ électrique, magnétique et de Poynting.

17) Montrer que la norme du vecteur de Poynting peut s'exprimer en fonction de la densité volumique d'énergie électromagnétique, u.

Définition :
La puissance rayonnée, $P_{rayonnée}$, par le champ électromagnétique à travers une surface S est égale au flux d'un vecteur appelée vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$:

$$P_{rayonnée} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS}$$

18) En déduire la puissance rayonnée traversant une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.

19) Soit un volume fini V de l'espace délimité par une surface fermée Σ, réécrire l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique à l'aide de deux intégrales.

Propriété :
Le vecteur de Poynting, représentant la densité surfacique de puissance rayonnée, est dirigé dans la direction de propagation de l'onde plane donnée par $\vec{n}$. Ainsi, l'énergie d'une OPP dans le vide se propage à la célérité, c.

3 Onde plane progressive monochromatique

L'OPPM est un modèle. Il est très intéressant car toute onde plane peut être exprimée comme la somme d'OPPM. Une onde plane progressive monochromatique représente donc la composante élémentaire d'un paquet d'ondes.

3.1 Retour sur l'équation d'onde scalaire

3.1.1 Solution unidimensionnelle

Soit l'équation d'onde suivante vérifiée par la fonction $s(x,t)$: $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

Les solutions s'écrivent sous la forme d'OPP telles que : $s(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$

On suppose que la propagation se fait selon les x croissants, ce qui donne : $s(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$

20) L'onde plane progressive monochromatique associée s'écrit sous la forme :

$$s(x,t) = s_m\, cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right) = s_m\, cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0\right)$$

Expliquer la forme précédente. Que représentent s_m, ω et φ_0 ?

21) On pose : $\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{n} = k\vec{n}$ le vecteur d'onde (en rad.m^{-1}) où le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur unitaire selon la direction de propagation. Donner alors son expression dans notre exemple. Montrer que l'on peut aussi écrire k en fonction de la longueur d'onde (en m), λ, sous la forme : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Que représente la longueur d'onde ?

22) Réécrire $s(x,t)$ en fonction de k. Commenter.

3.1.2 Solution 3D

Soit l'équation d'onde suivante vérifiée par la fonction $s(x,y,z,t)$: $\Delta s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

L'OPPM solution s'écrira par analogie sous la forme suivante : $s(x,y,z,t) = s_m\, cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)$

où $\vec{k} = k\vec{n}$ représente le vecteur d'onde dirigé selon la direction de propagation donnée par le vecteur unitaire $\vec{n}$

où $\vec{r}$ représente le vecteur position tel que : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$ en coordonnées cartésiennes.

23) Montrer que l'on retrouve bien l'expression de la question 22 dans le cas d'une propagation unidimensionnelle selon x.

Définition :

Une onde plane progressive est dite **monochromatique** si c'est une fonction sinusoïdale de fréquence f (ou pulsation ω). Une OPPM se propageant à la vitesse v selon la direction donnée par un vecteur unitaire $\vec{n}$ s'écrit sous la forme :

Elle est caractérisée par : - sa **pulsation**, ω, ou sa **fréquence**, f, ou sa période temporelle, T :

- son **vecteur d'onde**, $\vec{k}$, ou sa **longueur d'onde**, λ :

Elle présente une **double-périodicité** temporelle de période T et spatiale de période λ.

Ces deux périodes sont reliées par la relation :

3.1.3 Notation complexe

L'écriture complexe peut être très utile lors de l'utilisation de fonctions sinusoïdales. Ainsi, on peut écrire la solution complexe sous la forme : $\underline{s}(x,y,z,t) = \underline{S}(x,y,z)e^{j\omega t} \quad avec \quad \underline{S}(x,y,z) = s_m e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{j\varphi_0}$

$$s(x,y,z,t) = \Re\left[\underline{s}(x,y,z,t)\right]$$

3.2 Application au champ électromagnétique

3.2.1 Propagation unidimensionnelle

24) En supposant toujours une propagation unidimensionnelle selon les x croissants, réécrire sous forme d'OPPM les expressions des vecteurs champ électrique et magnétique déterminées à la partie 2 et rappelées ci-dessous :

$$\vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix} \quad et \quad \vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$$

3.2.2 Propagation 3D

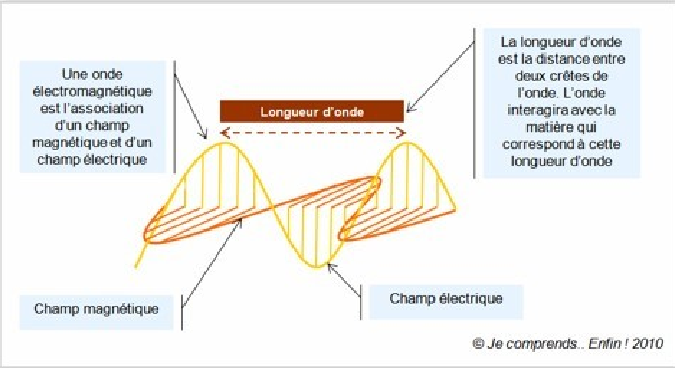
Les champs se mettent alors sous la forme :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x}\, cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_{0x}\right) \\ E_{0y}\, cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_{0y}\right) \\ E_{0z}\, cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_{0z}\right) \end{pmatrix} \quad et \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_{0x}\, cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi'_{0x}\right) \\ B_{0y}\, cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi'_{0y}\right) \\ B_{0z}\, cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi'_{0z}\right) \end{pmatrix}$$

25) Montrer alors que $\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{E}$. Commenter.

Propriété :
Pour une onde plane progressive monochromatique de direction de propagation donnée par le vecteur unitaire $\vec{n}$, les champs électrique et magnétique sont **transverses**. Ils forment avec le vecteur d'onde un trièdre direct.

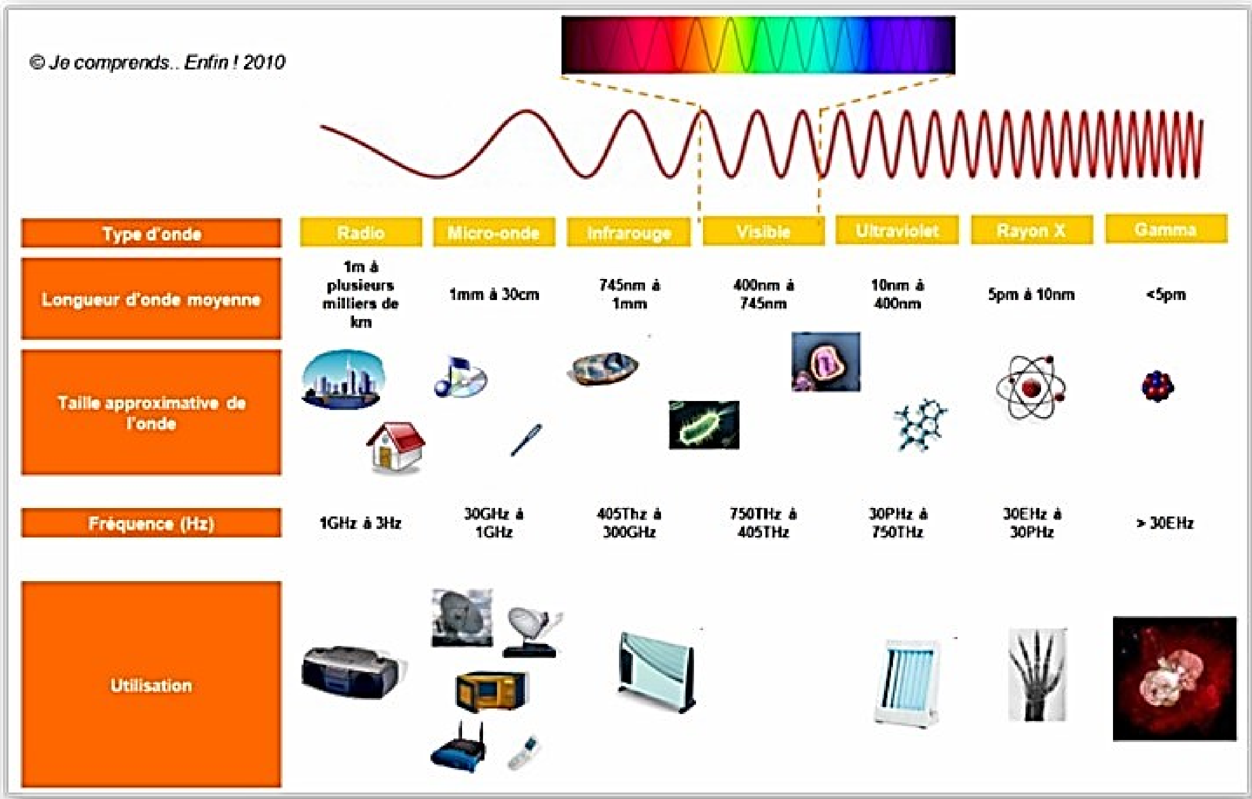
$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{E}$$



Propriété :
Dans le vide, dans une région sans charges ni courants, le modèle de l'OPPM conduit à la **relation de dispersion** :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Quelques valeurs de fréquence et de longueur d'onde pour les ondes électromagnétiques :



3.2.3 Notation complexe

Pour une OPPM, le champ électromagnétique peut s'écrire à l'aide de la notation complexe tel que :

$$\vec{E} = \underline{\vec{E_0}} e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad avec \quad \underline{\vec{E_0}} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{j\varphi_{0x}} \\ E_{0y} e^{j\varphi_{0y}} \\ E_{0z} e^{j\varphi_{0z}} \end{pmatrix} \quad et \quad \vec{B} = \underline{\vec{B_0}} e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad avec \quad \underline{\vec{B_0}} = \begin{pmatrix} B_{0x} e^{j\varphi'_{0x}} \\ B_{0y} e^{j\varphi'_{0y}} \\ B_{0z} e^{j\varphi'_{0z}} \end{pmatrix}$$

3.3 Etats de polarisation d'une onde plane progressive (monochromatique)

Dans l'espace vide de charge et de courant, l'onde électromagnétique est transverse. Les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires à la direction de propagation. Ainsi, pour capter une onde (antenne pour une onde radio, capteur lumineux pour une onde lumineuse), le capteur doit être orienté dans le plan d'onde (plan perpendiculaire à la direction de propagation) et de manière à recevoir le maximum d'énergie. L'étude de la polarisation de l'onde devient alors primordiale.

3.3.1 Etats de polarisation

3.3.1.1 Polarisation elliptique

Définition :

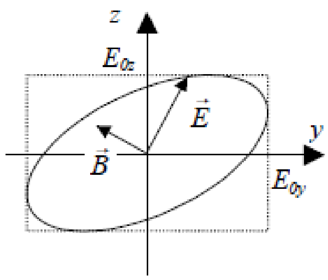
La **polarisation** d'une OPPH est définie à partir de son vecteur $\vec{E}$, comme la nature de la courbe décrite par l'extrémité de $\vec{E}$ dans un plan d'onde. Par convention, l'observateur est supposé faire face au champ électromagnétique qui progresse donc vers lui.

On considère toujours une OPP se propageant selon les x croissants. Pour définir sa polarisation, on se place dans le plan $x = 0$ et on observe l'évolution du vecteur $\vec{E}$ dans ce plan. On va supposer ici que l'OPP est monochromatique, donc que sa dépendance au temps est sinusoïdale.

26) Réécrire l'expression du champ électrique pour une propagation unidimensionnelle selon les x croissants en $x = 0$.

En choisissant convenablement, une origine des temps, on peut se ramener à l'expression suivante :

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - \varphi) \end{cases} \quad avec \quad \varphi = \varphi_y - \varphi_z$$



On reconnait la représentation paramétrique d'une ellipse qui donne l'état de polarisation le plus général d'une OPPM.

Remarque :

Même principe que le mode XY d'un oscilloscope

3.3.1.2 Polarisation circulaire

27) Dans quelle cas l'ellipse précédente, peut-elle devenir un cercle ?

3.3.1.3 Polarisation rectiligne

28) Dans quelle cas l'ellipse précédente, peut-elle devenir une droite ?

29) Représenter le vecteur champ électrique dans le plan $x = 0$, si la polarisation est rectiligne selon Oy.

3.3.2 OPPM polarisée rectilignement

30) On suppose que le champ électrique se propageant selon les x croissants est polarisé rectilignement suivant Oy. Quelles composantes du champ électrique sont nulles ? Montrer que le champ magnétique peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{B} = B_{0z}\, cos\left(\omega t - kx + \varphi'_{0z}\right) \overrightarrow{u_z}$$

On exprimera B_{0z} et φ'_{0z} en fonction de E_{0y}, c et φ_{0y}.

31) Dans le cas d'une propagation 3D et polarisation rectiligne selon Oy, comment peut-on écrire le champ électrique ?

3.3.3 Mise en évidence d'une polarisation rectiligne

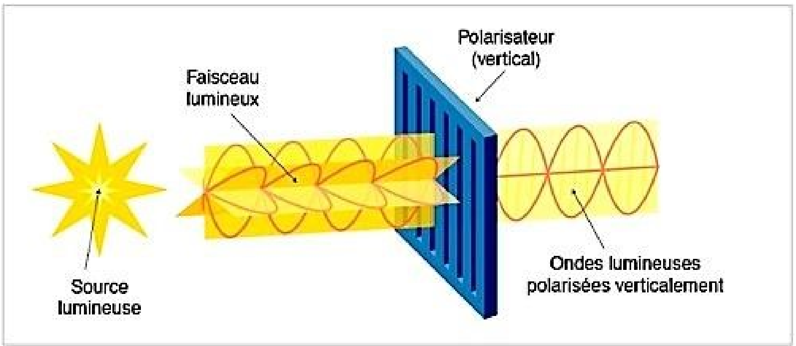
L'onde électromagnétique étudiée est l'onde lumineuse. On utilise une source monochromatique (laser ou lumière blanche + filtre). L'onde obtenue n'a aucune raison d'être polarisée. Nous allons donc essayer de produire une polarisation rectiligne et de la mettre en évidence.

3.3.3.1 Production de la polarisation rectiligne

On utilise un polariseur. C'est un système optique possédant deux directions privilégiées. L'une d'entre elles, appelée axe de transmission, est telle que le polariseur transmet la composante du champ électrique incident parallèle à l'axe de transmission.

La seconde perpendiculaire à la première et est appelée axe d'extinction, le polariseur arrête la composante du champ électrique parallèle à cette direction.

On place donc ce polariseur devant la source de lumière. La lumière sortant du polariseur sera polarisée rectilignement parallèlement à la direction de l'axe de transmission.



3.3.3.2 Mise en évidence de la polarisation rectiligne

On place maintenant un autre polariseur à la suite du premier. Ce second polariseur sera nommé analyseur. Les axes de transmissions respectifs des deux polariseurs forment entre eux un angle α. Si l'on nomme $\overrightarrow{n_1}$ la direction de polarisation du champ électrique $\overrightarrow{E_1}$ après le premier polariseur et $\overrightarrow{n_2}$ la direction de polarisation du champ électrique $\overrightarrow{E_2}$ après l'analyseur, alors :

$\overrightarrow{E_1} = E_1\overrightarrow{u_1} \quad et \quad \overrightarrow{E_2} = E_2\overrightarrow{u_2} = E_1 \cos\alpha\,\overrightarrow{u_2}$

Ainsi, si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ le champ électrique à la sortie de l'analyseur est nul.

On peut ainsi mettre en évidence de manière très simple une polarisation rectiligne.

3.4 Aspect énergétique

On se propose de regarder comme évoluent les considérations énergétiques pour une OPPM se propageant selon les x croissants et polarisée selon Oy :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_{0y}\, cos(\omega t - kx + \varphi_{0y})\,\overrightarrow{u_y} \\ \vec{B} = \dfrac{E_{0y}}{c} cos(\omega t - kx + \varphi_{0y})\,\overrightarrow{u_z} \end{cases}$$

Remarque :

Il est nécessaire de se placer en réels pour effectuer cette étude car elle fait intervenir les carrés des champs. Prendre la partie réelle d'un carré n'est pas la même chose que prendre le carré de la partie réelle d'un nombre complexe.

3.4.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

32) Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie transportée par l'onde plane progressive électromagnétique. Les détecteurs sont le plus souvent sensibles à la valeur moyenne de l'énergie. Que vaut sa valeur moyenne $\langle u \rangle$? Commenter.

3.4.2 Vecteur de Poynting

33) A partir de la définition du vecteur de Poynting, donner son expression pour l'OPPM considérée. Que vaut sa valeur moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle$?

Remarque :

On définit l'intensité I de l'onde (W.m^{-2}) par la moyenne de la composante du vecteur de Poynting selon la direction de propagation : $I = \frac{c\varepsilon_0 E_{0y}^2}{2}$

4 Réflexion sous incidence normale d'une OPPM polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait

4.1 Hypothèses

4.1.1 Modèle du conducteur parfait

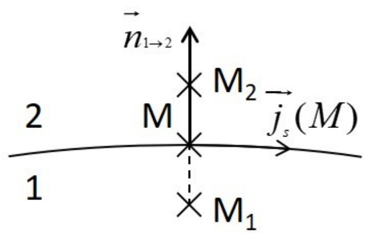
Définition :
Dans un conducteur parfait, la conductivité est très grande et on la considère infinie :

$$\gamma \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \to \vec{0}, \quad \rho \to 0, \quad \vec{B} \to \vec{0}, \quad \vec{j} = \vec{0}$$

Exemple :
Un bon conducteur comme le cuivre possède une conductivité de l'ordre de : $\gamma = 10^7 \mathrm{S.m^{-1}}$

4.1.2 Relation de passage entre deux milieux

On considère une interface entre deux demi-espaces indicés 1 et 2 et l'on note $\vec{n}_{1\to 2}$ la normale en un point M de cette surface, orientée du milieu 1 vers le milieu 2. On définit deux points M_1 et M_2 dans chaque demi-espace au voisinage du point M.
Soit $\sigma(M)$ la densité surfacique de charge au point M, la relation suivante résume la relation de passage du champ électrique à la traversée de la surface :



$$\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1\to 2}$$

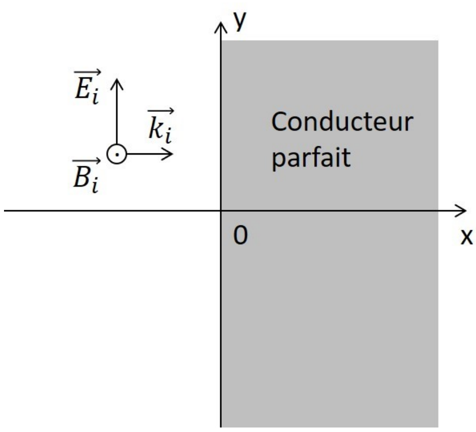
34) Que peut-on dire de la composante tangentielle du champ électrique au niveau d'un plan chargé ? Donner un exemple tiré du cours d'électrostatique où cette discontinuité avait déjà pu être observée.

4.1.3 Onde incidente

Soit une onde électromagnétique incidente polarisée rectilignement selon Oy se propageant dans le vide dans une région sans charges ni courants selon l'axe Ox croissant dans le demi-espace $x < 0$.
En $x = 0$, dans le plan Oyz, se trouve un conducteur parfait.
Le champ électrique incident peut s'écrire :

$$\overrightarrow{E_i} = E_{0i}\, cos(\omega t - k_i x)\, \overrightarrow{u_y}$$

35) Donner l'expression du champ magnétique incident.



4.2 Réflexion sur un conducteur parfait

36) En utilisant la relation de passage pour le champ électrique en $x = 0$, montrer que la charge en surface du conducteur parfait est forcément nulle. Montrer ensuite qu'il faut qu'il existe une onde réfléchie se propageant à la même vitesse que l'onde incidente mais selon les x décroissants.

37) On pose l'expression suivante du champ électrique réfléchi :

$$\overrightarrow{E_r} = E_{0r}\, cos\big(\omega t + \overrightarrow{k_r} \cdot \vec{r}\big)\, \overrightarrow{u_y}$$

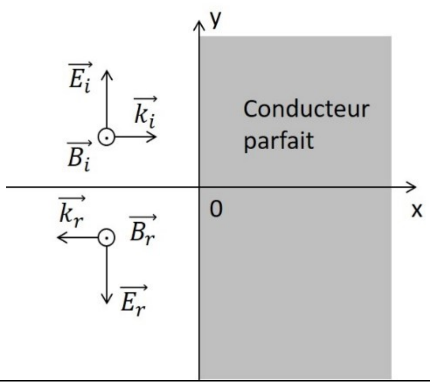
Donner l'expression du vecteur d'onde réfléchi $\overrightarrow{k_r}$ en fonction du vecteur d'onde incident $\overrightarrow{k_\iota}$/

A l'aide de la relation de passage pour le champ électrique en $x = 0$, donner l'expression de l'amplitude du champ électrique réfléchi E_{0r} en fonction de l'amplitude du champ électrique incident E_{0i}.

38) Donner l'expression du champ magnétique réfléchi.

Propriété :

La réflexion d'une onde électromagnétique sous incidence normale sur un conducteur parfait est une **réflexion totale** avec un déphasage de π du champ électrique et un déphasage nul pour le champ magnétique. Il n'y a pas de charges surfaciques.



4.3 Superposition des ondes

39) Donner l'expression du champ électrique total dans le vide. On pourra utiliser l'identité suivante :

$$cos(p) - cos(q) = -2\,sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

40) Donner l'expression du champ magnétique total dans le vide. Comparer son expression à celle du champ électrique total. On pourra utiliser l'identité suivante :

41) Représenter les champs électriques et magnétiques totaux dans l'espace en un temps t_0 fixé.

Propriété :
La superposition des ondes incidentes et réfléchies sur un conducteur parfait donne naissance à une onde dont les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : l'onde résultante est une **onde stationnaire**. L'onde ne se propage plus. Elle oscille sur place.

42) Trouver la position x_n des nœuds de vibration du champ électrique, positions pour lesquelles le champ électrique total est nul. Quelle est la distance entre 2 nœuds successifs ?

43) Trouver la position x_v des ventres de vibration du champ électrique, positions pour lesquelles le champ électrique total est maximal. Quelle est la distance entre 2 ventres successifs ? Quelle est la distance entre un nœud et un ventre successif ?

44) Que peut-on dire de la position relative des nœuds et ventres de vibration du champ magnétique total ?

4.4 Aspect énergétique

45) Donner l'expression des vecteurs de Poynting associés à l'onde incidente $\overrightarrow{\Pi_i}$ et à l'onde réfléchie $\overrightarrow{\Pi_r}$. Donner leur valeur moyenne.

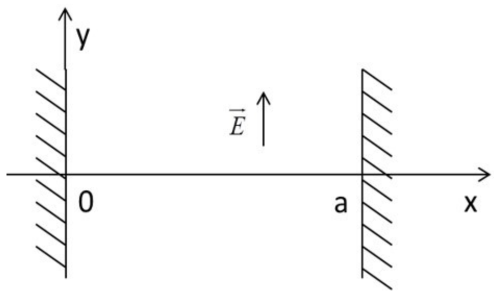
46) Donner l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi_{total}}$ associé à l'onde résultant de la superposition des champs incidents et réfléchis. Donner sa valeur moyenne. Pouvait-on prévoir ce résultat ? On rappelle :

$$sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$$

5 Applications aux cavités à une dimension

5.1 Position du problème

On considère une cavité vide taillée à l'intérieur d'un conducteur parfait entre les abscisses $x = 0$ et $x = a$. Un émetteur engendre en continu une onde électromagnétique arrivant en incidence normale sur la face $x = a$. L'onde est alors réfléchie ; elle se propage en sens inverse jusqu'à rencontrer l'autre face $x = 0$. Elle est à nouveau réfléchie et le processus se répète indéfiniment. On comprend alors que l'onde résultante possède une structure stationnaire, vu la superposition d'ondes progressives de sens de propagation opposés et de même amplitude.



5.2 Mode d'onde stationnaire

On suppose ici que le champ électrique est polarisé selon Oy et d'amplitude E_0, alors :

$$\vec{E} = 2E_0 \, sin(\omega t) \, sin(kx) \, \overrightarrow{u_y}$$

47) Montrer que cette expression vérifie la relation de passage pour le champ électrique en $x = 0$.

48) En utilisant la relation de passage pour le champ électrique en $x = a$, montrer que seules certaines longueurs d'ondes λ_p peuvent subsister dans la cavité. On donnera leur expression en fonction de a. Commenter.

49) Donner alors l'expression des fréquences et pulsations associées à ces longueurs d'onde et remplacer dans l'expression du champ électrique.

50) En un temps t_0 fixé tel que $sin\left(p\pi \frac{ct_0}{a}\right) = 1$, tracer l'amplitude du champ électrique en fonction de x, pour des valeurs de $p \in [1; 3]$. L'entier p est appelé mode propre de l'onde stationnaire.

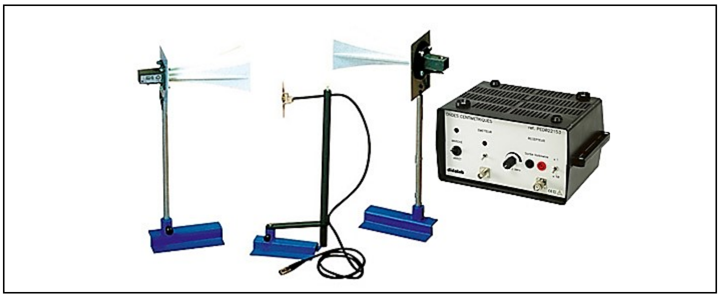
51) Que se passe-t-il si l'émetteur engendre une onde de longueur d'onde différente des λ_p dans la cavité ?

6 Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique dans le domaine des ondes centimétriques

6.1 Matériel

Kit détection : PED022160 de chez Didalab

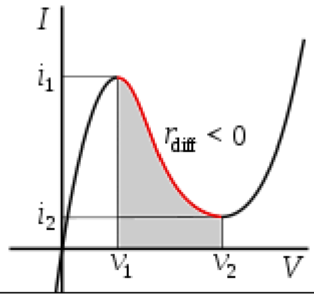
- 2 Antennes cornet (1 émettrice, 1 réceptrice)
- 1 Alimentation
- 1 Antenne Dipole
- Ecran en métal : 24 cm x 24 cm
- Oscilloscope
- Banc optique
- Carte d'acquisition MyDAQ
- Ordinateur portable



6.2 Description détaillée du dispositif

6.2.1 Emetteur

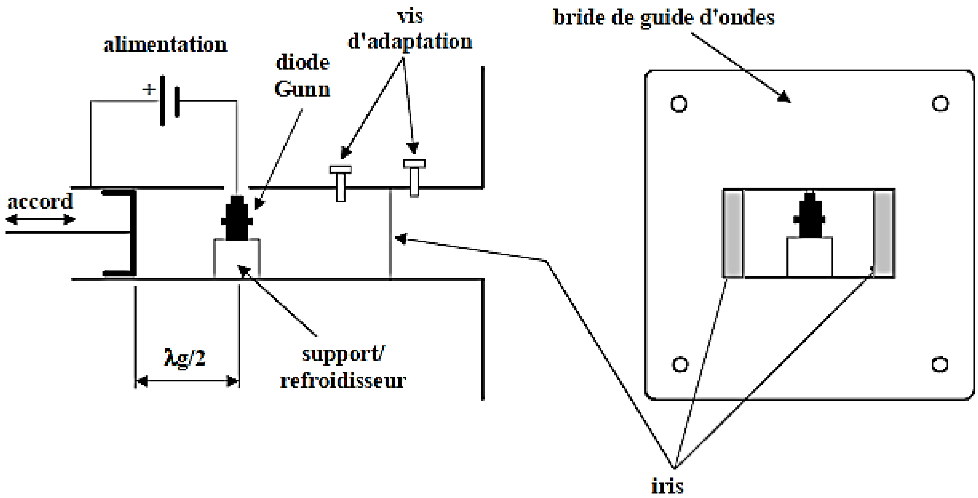
L'émetteur est composé d'une diode Gunn. Ce dipôle est un dipôle oscillant composé d'un cristal semi-conducteur d'Arséniure de Gallium (GaAs). Sa caractéristique tension-courant montre une résistance positive pour des tensions faibles inférieures à 4 V et négative pour des tensions supérieures à cette valeur. Ici elle est alimentée avec une tension comprise entre 7 et 9 volts.



Caractéristique Courant-tension d'une diode Gunn

Si on place la diode Gunn dans une cavité résonnante appropriée, on forme un oscillateur délivrant un signal à la fréquence de résonance de la cavité. La diode utilisée dans cette expérience oscille autour de 10 GHz avec une puissance 10 mW.
L'oscillateur à diode Gunn est ensuite relié à une antenne cornet qui permet d'émettre une onde électromagnétique polarisée rectilignement à 9,5 GHz.

Oscillateur à diode Gunn avec cavité résonante et antenne cornet



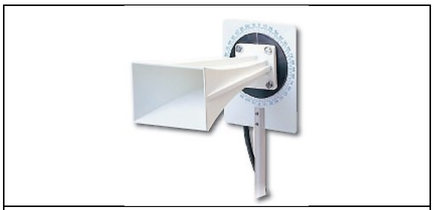
Principe de l'oscillateur à diode Gunn

6.2.2 Boitier d'alimentation

Le boitier d'alimentation contient les circuits nécessaires à l'alimentation de la diode Gunn.
La face avant du boitier permet de régler la fréquence désirée : $f_1 = 9{,}5 GHz$ ou $f_2 = 11{,}4 GHz$.

6.2.3 Récepteur avec antenne cornet

Le récepteur est composé d'une diode réceptrice hyperfréquence, placée dans une cavité résonante accordée, elle-même reliée à une antenne cornet qui permet de recevoir une onde électromagnétique polarisée rectilignement autour de 10 GHz. La tension aux bornes de la diode est proportionnelle à la puissance moyenne de l'onde reçue, à condition que cette puissance ne soit pas trop élevée. L'antenne cornet peut tourner autour d'un axe horizontal. Il est ainsi possible de choisir la direction de polarisation de l'onde reçue.



Récepteur avec antenne cornet

6.2.4 Récepteur avec antenne dipôle

Cette antenne est composée de deux fils fins placés à 180° l'un de l'autre. Elle est utilisée en réception et permet de recevoir une onde électromagnétique polarisée rectilignement. Elle est aussi reliée à une diode réceptrice mais sans cavité résonante. La tension en sortie sera donc moins élevée qu'avec le cornet.

6.2.5 Question

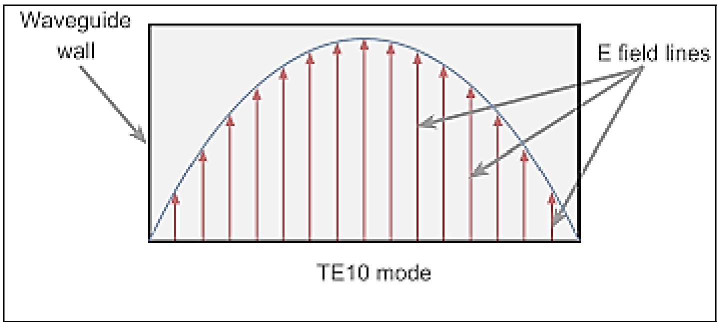
1) Expliquer pourquoi les diodes en émission et réception sont placées dans des cavités. Donner une valeur de la longueur de la cavité pour qu'elle sélectionne une fréquence de 10 GHz.

6.3 Manipulations

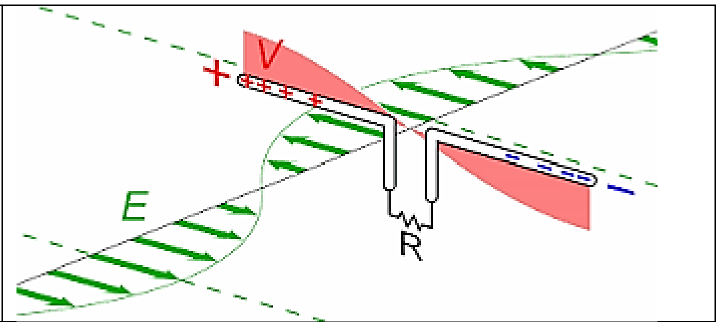
L'antenne cornet est alimentée et émet une onde à la fréquence $f_1 = 9{,}5 GHz$. En face d'elle, l'antenne cornet de réception ou l'antenne dipôle sont reliées à l'oscilloscope pour observer le signal continu en sortie de la diode réceptrice.

6.3.1 Polarisation

L'onde émise par le cornet émetteur est polarisée rectilignement, comme illustré ci-dessous.



Champ électrique dans l'ouverture d'un antenne cornet



Champ électrique reçu par une antenne dipole

2) On utilise dans un premier temps le cornet en réception, observer sur l'oscilloscope la courbe obtenue en le faisant tourner autour de son axe. Expliquer la courbe obtenue et conclure sur l'orientation respective des cornets en fonction de la tension reçue.
3) On obtient une courbe similaire en faisant tourner l'antenne dipôle en réception autour de son axe. Quelle est sa direction de polarisation ?

6.3.2 Atténuation avec la distance

On replace les deux cornets (émission et réception) en face l'un de l'autre.

4) On relève la tension reçue tout en modifiant la distance entre émetteur et récepteur. Comment peut-on modéliser sa variation ? Commenter.

6.3.3 Réflexion et ondes stationnaires

Antenne cornet en émission, antenne dipôle en réception et écran métallique sont maintenant alignés sur un banc d'optique. L'antenne dipôle est déplacée entre le cornet et l'écran métallique.

5) Réaliser un schéma du dispositif expérimental.
6) Commenter l'évolution de la tension reçue lorsque l'on déplace l'antenne dipôle entre le cornet et l'écran métallique.

7) En choisissant deux positions bien particulières de l'antenne dipôle, retrouver la longueur d'onde de l'émetteur et remonter à sa fréquence.

8) Evaluer l'incertitude de cette mesure.

7 Questions de cours

1) Etablir les équations de propagation pour les champs électriques et magnétiques dans un espace vide de charges et de courants.

2) On suppose que l'équation de propagation est vérifiée par une fonction scalaire $s(x, t)$. Donner l'équation de propagation simplifiée. Quelle est la solution générale d'une telle équation ? On donnera la définition de l'onde obtenue et on précisera bien chacun des termes entrant dans sa composition.

3) Décrire la structure d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant. Quelle relation permet de relier les champs électriques, magnétiques et la direction de propagation ?

4) Donner les expressions de la densité volumique d'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting. Les simplifier pour une onde électromagnétique se propageant dans le vide sans charge ni courant. Commenter.

5) Définir la puissance rayonnée par une onde électromagnétique. Comment peut-on la relier à l'énergie électromagnétique ?

6) On suppose que l'équation de propagation est vérifiée par une fonction scalaire $s(x, y, z, t)$. Cette fonction représente une onde plane progressive monochromatique. Sous quelle forme peut-elle s'écrire ? Définir toutes les caractéristiques de cette onde.

7) Quelle relation permet de relier les champs électriques, magnétiques et le vecteur d'onde pour une onde plane progressive monochromatique ? Donner la relation de dispersion.

8) Expliquer ce qu'est la polarisation d'une onde. Qu'appelle-t-on polarisation rectiligne et comment la mettre en évidence ?

9) Soit une onde électromagnétique incidente polarisée rectilignement selon Oy se propageant dans le vide dans une région sans charges ni courants selon l'axe Ox croissant dans le demi-espace x < 0. En x = 0, dans le plan Oyz, se trouve un conducteur parfait. Pour simplifier l'étude, on suppose sa phase à l'origine nulle. Donner l'expression de l'onde incidente (champ E et B).

10) En utilisant le fait que la composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée d'une interface, donner l'expression de l'onde réfléchie (champ E et B). Commenter.

11) Retrouver l'expression de l'onde résultant de la superposition des ondes incidentes et réfléchies. Commenter.

12) Dans le cas d'une onde dans une cavité électromagnétique de longueur a, quelles sont les longueurs d'onde qui peuvent subsister dans la cavité ?

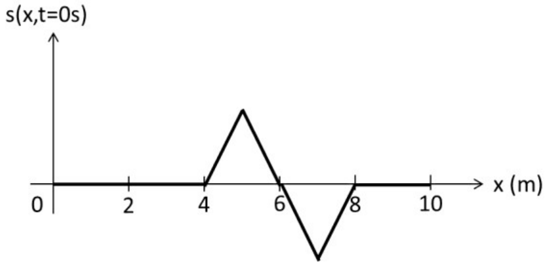
8 Exercices d'applications directes du cours

8.1 Onde progressive

On considère l'onde $s(x, t = 0)$ représentée ci-contre se propageant à la célérité $c = 2m.s^{-1}$ dans le sens des x croissants.

1) Représenter la forme de l'onde à l'instant $t = 1s$.

2) Un récepteur est placé à l'abscisse $x_0 = 8m$. Tracer l'évolution temporelle du signal reçu par ce récepteur.



8.2 Champ électromagnétique

On considère le champ électrique, régnant dans une partie de l'espace vide de charge et de courant :

$$\vec{E}(M,t) = E_0\, cos(\omega t + kz)\,\overrightarrow{u_x} + E_0\, sin(\omega t + kz)\,\overrightarrow{u_y} \quad avec \quad k = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\,\omega$$

1) Vérifier la compatibilité de cette expression avec l'équation de propagation.

2) Que peut-on dire de sa polarisation ? de sa direction de propagation ?

3) Déterminer le champ magnétique associé.

4) Déterminer le vecteur de Poynting de ce champ électromagnétique.

8.3 Onde plane progressive monochromatique et notation complexe

On considère une onde électromagnétique polarisée selon Oy. Le champ électrique possède donc une seule composante selon $\overrightarrow{u_y}$. On utilise la notation complexe. On peut donc écrire le champ électrique sous la forme :

$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}} e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad avec \quad \underline{\overrightarrow{E_0}} = E_{0y} e^{j\varphi_{0y}} \overrightarrow{u_y} = \underline{E_0}\overrightarrow{u_y}$ où $\underline{E_0}$ représente l'amplitude complexe du champ électrique.

1) Il est possible de simplifier l'écriture des équations de Maxwell en utilisant la notation complexe. Montrer que :

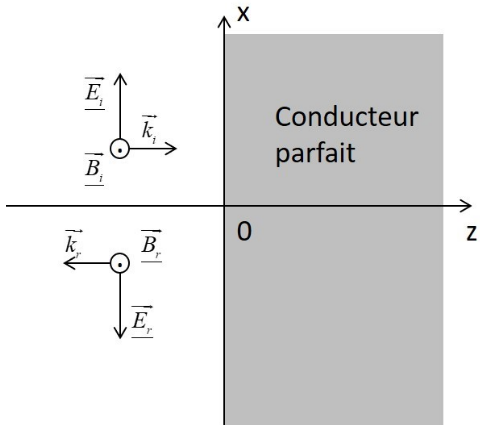
$$\begin{bmatrix} (MG) & div\vec{E} = 0 \\ (MA) & \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (MT) & div\vec{B} = 0 \\ (MF) & \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (MG) & \vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \\ (MA) & \vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = -\dfrac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}} \\ (MT) & \vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \\ (MF) & \vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}} \end{bmatrix}$$

2) Retrouver à partir de ces équations que le champ électromagnétique est transverse et forme un trièdre direct avec la direction de propagation.

3) L'équation de propagation peut aussi se simplifier en utilisant la notation complexe. En déduire la relation de dispersion : $k = \frac{\omega}{c}$.

4) Donner l'expression de $\underline{\overrightarrow{B_0}} = \underline{B_{0,x}}\overrightarrow{u_x} + \underline{B_{0,z}}\overrightarrow{u_z}$ où $\underline{B_{0,x}}$ et $\underline{B_{0,z}}$ représentent respectivement les amplitudes complexes du champ magnétique selon Ox et Oz.

8.4 Réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait



Soit une onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée (OPPM) rectilignement selon Ox se propageant dans le vide, dans une région sans charges ni courants, selon l'axe Oz croissant dans le demi-espace $z < 0$. En $z = 0$, dans le plan Oxy, se trouve un conducteur parfait. Pour simplifier l'étude, on suppose sa phase à l'origine nulle.

1) Proposer une expression du champ électrique incident $\overrightarrow{E_\iota}$ se propageant dans le demi-espace $z < 0$.

2) Pour une OPPM, il est possible d'utiliser la notation complexe telle que : $\overrightarrow{E_\iota} = \Re\left(\underline{\overrightarrow{E_\iota}}\right)$. Proposer une expression du champ électrique incident complexe $\underline{\overrightarrow{E_\iota}}$.

3) Donner l'expression du champ magnétique incident complexe $\underline{\overrightarrow{B_\iota}}$.

4) On pose l'expression suivante du champ électrique réfléchi complexe :

$$\underline{\overrightarrow{E_r}} = E_{0r} e^{j(\omega t + kz)} \overrightarrow{u_x}$$

Expliquer la forme du champ électrique réfléchi fournie. A l'aide de la relation de passage pour le champ électrique en $z = 0$, donner l'expression de l'amplitude du champ électrique réfléchi E_{0r} en fonction de l'amplitude du champ électrique incident E_{0i}. On suppose que la réflexion ne change pas la polarisation de l'onde.

5) Donner l'expression du champ magnétique réfléchi complexe $\underline{\overrightarrow{B_r}}$.

6) Donner l'expression du champ électrique complexe total dans le vide $\underline{\overrightarrow{E_{vide}}}$ résultant de la superposition des ondes incidentes et réfléchies. En déduire l'expression du champ électrique réel $\overrightarrow{E_{vide}}$.

7) Faire de même pour le champ magnétique.

9 Exercices type oral

9.1 Superposition des deux ondes planes progressives monochromatiques

On s'intéresse à la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de même amplitude E_0, de même pulsation ω et se propageant respectivement selon les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. On pose pour 0 ≤ α ≤ π/2 :

$$\overrightarrow{u_1} = sin\,\alpha\,\overrightarrow{u_x} + cos\,\alpha\,\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{u_2} = -\,sin\,\alpha\,\overrightarrow{u_x} + cos\,\alpha\,\overrightarrow{u_z}$$

1) Quelles sont les normes des deux vecteurs d'onde $\|\overrightarrow{k_1}\|$ et $\|\overrightarrow{k_2}\|$? En déduire l'expression de $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$ en fonction de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, respectivement.

2) Sachant que les deux champs électriques $\overrightarrow{E_1}$ (se propageant selon $\overrightarrow{u_1}$) et $\overrightarrow{E_2}$ (se propageant selon $\overrightarrow{u_2}$) sont parallèles à $\overrightarrow{u_y}$ et de déphasage nul à l'origine du repère, donner leur expression sous forme complexe.

3) En déduire l'expression du champ électrique total. Décrire l'onde obtenue. Est-elle plane ? Est-elle progressive ?

4) Donner la forme du champ magnétique. Commentaires.

5) En déduire le vecteur de Poynting moyen. Pouvait-on deviner sa direction ?

9.2 Cavité résonante

On s'intéresse à une cavité contenue entre deux plans parallèles infinis, taillée dans un conducteur parfait entre z = 0 et z = a. On s'intéresse à un champ électromagnétique, qui est la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement suivant Ox et de sens de propagation opposés ± u_z, de normes respectives E_1 et E_2.

1) Donner l'expression du champ électrique complexe résultant de la superposition, puis la forme exacte du champ électrique dans la cavité en utilisant les conditions aux limites.

2) Montrer que seules certaines longueurs d'onde discrètes λ_n peuvent exister dans la cavité. Quelles sont les fréquences f_n associées ?

3) Comment appeler ce phénomène ? Donner une analogie en électrocinétique. Que se passe-t-il si on essaie de créer un champ électromagnétique de fréquence différente de f_n ?

4) Tracer sur un même graphe l'allure, à un instant donné, du champ électrique pour les trois plus basses fréquences. Combien de nœuds et de ventres possède le mode numéro n ?

5) En admettant que, dans le domaine de l'acoustique, un tube soit régi par les mêmes équations qu'une cavité résonante, identifier les tubes d'une flûte de Pan produisant les sons aigus et ceux produisant les sons graves. On supposera que le mode fondamental n = 1 est prédominant.

10 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 30/01/2023)

Dans tout le problème, la permittivité électrique de l'air est égale à celle du vide, notée ε_0. De même, la perméabilité magnétique de l'air est égale à celle du vide, notée μ_0.

On considère un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ où $\vec{E}$ désigne le champ électrique et $\vec{B}$ le champ magnétique.

1) Ecrire les quatre équations de Maxwell en présence de charges et de courants en précisant bien la signification de tous les termes intervenant dans ces équations.
Que deviennent ces équations dans le vide ?

2) Déterminer les équations de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans une région sans charges ni courants.

3) Montrer qu'une onde électromagnétique dont les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont donnés par les expressions ci-dessous satisfait aux équations de propagation précédentes à condition que c soit lié à ε_0 et μ_0 par une relation que l'on démontrera :

$$\begin{cases} \vec{E}(x,t) = \overrightarrow{E_0}\, cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \\ \vec{B}(x,t) = \overrightarrow{B_0}\, cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \end{cases}$$ où $\overrightarrow{E_0}$ et $\overrightarrow{B_0}$ sont des vecteurs constants

Quelle est la signification physique de c ?

4) Soit une onde plane progressive monochromatique, de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$ se propageant dans le vide. Son champ électrique $\vec{E}$ et son champ magnétique $\vec{B}$ en un point M de l'espace repéré par le vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E} = \overrightarrow{E_0}\, cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \\ \vec{B} = \overrightarrow{B_0}\, cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \end{cases}$$ où $\overrightarrow{E_0}$ et $\overrightarrow{B_0}$ sont des vecteurs constants

En utilisant les équations de Maxwell, démontrer que :

- le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire à la direction de propagation donnée par le vecteur d'onde $\vec{k}$,
- le champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire à la direction de propagation donnée par le vecteur d'onde $\vec{k}$,
- le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ sont perpendiculaires entre eux,
- les normes du champ électrique et du champ magnétique sont telles que : $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

On pourra éventuellement, pour simplifier les notations lors des calculs, décomposer les vecteurs $\overrightarrow{E_0}$, $\overrightarrow{B_0}$ et $\vec{k}$ sur les trois axes d'un repère orthonormé (Oxyz) : $\overrightarrow{E_0}\left|\begin{matrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{matrix}\right.\quad \overrightarrow{B_0}\left|\begin{matrix} B_{0x} \\ B_{0y} \\ B_{0z} \end{matrix}\right.\quad \vec{k}\left|\begin{matrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{matrix}\right.$

5) Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à une onde électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$.
Quelle est la signification physique de ce vecteur ?
Quelle est l'unité du système international qui lui correspond ?

6) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ relatif à une onde plane progressive monochromatique du type de l'onde décrite précédemment dans la question 3. On donnera l'expression de $\vec{\Pi}$ en fonction de c, ε_0, d'un vecteur unitaire que l'on précisera et de E (norme du vecteur champ électrique).