Transfert d'énergie par conduction thermique à une dimension en coordonnées cartésiennes

Extrait du programme

La partie 1.7 « Transfert d'énergie par conduction thermique à une dimension en coordonnées cartésiennes » aborde l'étude de la conduction thermique dans les solides. On se limite à l'étude de problèmes à une dimension en coordonnées cartésiennes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7. Transfert d'énergie par conduction thermique à une dimension en coordonnées cartésiennes.	
Flux thermique. Vecteur densité de flux thermique.	Définir et algébriser le flux thermique échangée à travers une interface.
Loi de Fourier.	Relier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Utiliser la loi de Fourier.
Bilan d'énergie.	Établir la relation entre la température et le vecteur densité de flux thermique.
Équation de la diffusion thermique sans terme source.	Établir l'équation de la diffusion thermique. Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène. Relier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion au coefficient de diffusion par une analyse dimensionnelle. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire.	Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie électrique lors d'un bilan thermique.
Loi de Newton.	Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs.

Mesures et capacités expérimentales

Nature et méthodes	Capacités exigibles
4. Thermodynamique	
Conduction thermique.	Mettre en œuvre un dispositif de mesure de conductivité thermique le protocole étant donné.

Outils numériques

Outils numériques	Capacités exigibles
Équation de diffusion à une dimension.	Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable.

Sommaire

1 LES DIFFERENTS MODES DE TRANSFERTS THERMIQUES 2

1.1 CONDUCTION THERMIQUE 2
1.2 CONVECTION THERMIQUE 2
1.3 RAYONNEMENT THERMIQUE 2

2 FLUX THERMIQUE 2

2.1 FLUX THERMIQUE 2
2.2 VECTEUR DENSITE DE FLUX THERMIQUE 2
2.3 BILAN D'ENERGIE 2

3 TRANSFERT D'ENERGIE PAR CONDUCTION THERMIQUE 2

3.1 LOI DE FOURIER 2
3.2 ÉQUATION DE LA DIFFUSION THERMIQUE SANS TERME SOURCE 2
3.3 IRREVERSIBILITE DU PHENOMENE 2
3.4 CAPACITE NUMERIQUE 2

4 CAS DU REGIME STATIONNAIRE 2

4.1 RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA DIFFUSION THERMIQUE 2
4.2 ANALOGIE ELECTRIQUE 2

5 TRANSFERT D'ENERGIE CONDUCTO-CONVECTIF : LOI DE NEWTON 2

6 TP : MESURE DE CONDUCTIVITES THERMIQUES 3

6.1 MATERIEL A DISPOSITION 3
6.2 INSTALLATION ET PRESENTATION DU MATERIEL 3
6.3 LANCEMENT DE L'ACQUISITION 3
6.4 ETUDE THEORIQUE 4
6.5 EXPLOITATION DES MESURES 4
6.6 SIMULATION DE L'EXPERIENCE AVEC LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES 4

7 QUESTIONS DE COURS 5

8 EXERCICES TYPE ORAL 6

8.1 CONTACTS THERMIQUES 6
8.2 BILAN ENTROPIQUE MACROSCOPIQUE 6
8.3 SIMPLE ET DOUBLE VITRAGE 6
8.4 CHAUFFAGE D'UNE PIECE 6
8.5 ISOLANT 7
8.6 AILETTE DE REFROIDISSEMENT 7

9 DM POUR LE 28/11/2022 8

9.1 CCP TSI 2020 8

6 TP : Mesure de conductivités thermiques

6.1 Matériel à disposition

Appareil de conduction thermique Didalab
Barres métalliques (Cuivre, Aluminium)

Ordinateur portable
Boitier ITAC
Manuel utilisateur

Câble USB
Câble HDMI
Câble alimentation 12 V

6.2 Installation et présentation du matériel

L'appareil de conduction thermique permet d'observer le phénomène de conduction thermique selon la longueur d'une barre de métal (Cuivre, Aluminium) en relevant la température en 8 points (capteurs) de cette dernière répartis comme suit (Figure 1). La propagation de la chaleur peut ici être considérée comme unidimensionnelle, l'appareil permettant de calorifuger la barre latéralement.

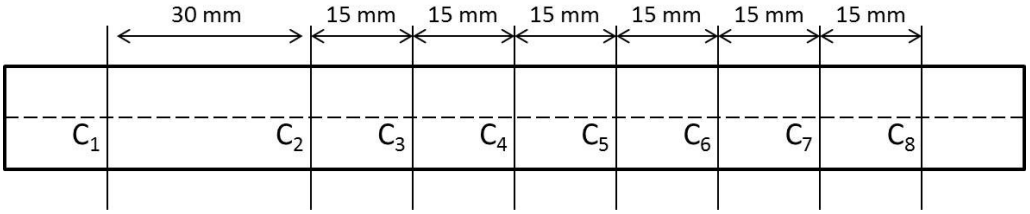


Figure 1

6.3 Lancement de l'acquisition

On essaie dans un premier temps de mesurer la conductivité thermique du cuivre. Pour cela, la barre de cuivre a été insérée dans l'appareil au contact des capteurs thermiques. Le matériel est normalement prêt à être utilisé sur vos tables. Il suffit maintenant d'allumer les ordinateurs et de brancher le câble USB. Lancer le logiciel Conductoo.

6.3.1 Uniformisation des capteurs

Avant de lancer la chauffe, faites une acquisition simple (Figure 2).
La température par chaque capteur s'affiche. Les capteurs peuvent ne pas tous afficher la même température.
Dans le menu « Paramètre », cliquez sur « Uniformity ». Tous les capteurs affichent alors la même température.

6.3.2 Mesure

Régler la durée de l'acquisition à 1500s et le pas entre chaque point à 1s (Figure 3).

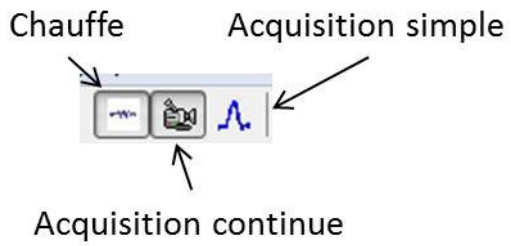


Figure 2

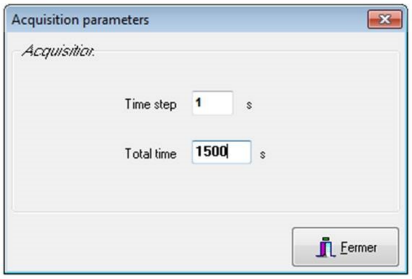


Figure 3 : Menu « paramètre », « Acquisition »

Lancer l'acquisition en continu et démarrez consécutivement la chauffe (Figure 2) et le ventilateur de l'appareil (bouton On/Off sur le côté). Tout au long de la mesure on peut observer l'évolution de la température sur chaque capteur (Figure 4).

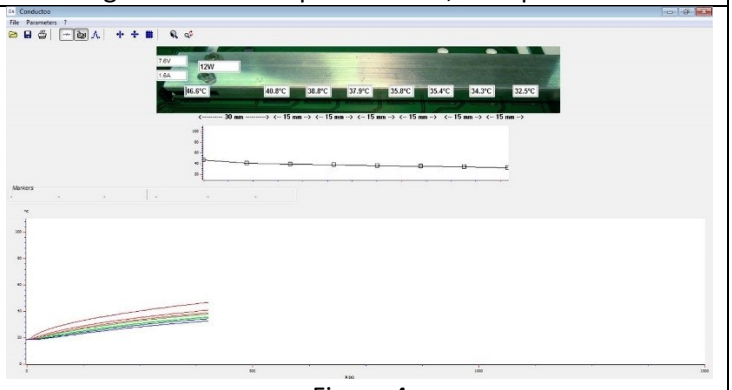


Figure 4

6.4 Etude théorique

6.4.1 Etude du régime transitoire

On rappelle l'équation de la chaleur dans le cas d'une propagation unidimensionnelle selon x par conduction thermique :

$$D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad avec \quad D = \frac{\lambda}{\mu c}$$

Le coefficient de diffusion permet de relier temps τ et longueur caractéristique L du phénomène de diffusion.

1) Donner la relation entre D, τ et L. Sachant que la longueur de la barre de cuivre est de $L = 19{,}5cm$, évaluer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire pour la barre de cuivre. Conclure sur la durée d'acquisition choisie.

6.4.2 Etude du régime permanent

2) En régime permanent (ou encore stationnaire), comment varie la température en fonction de la position x ? Quelle devrait être alors l'allure de la courbe représentant la température des 8 capteurs en fonction de leur position respective sur la barre de métal ?

3) Le programme indique une puissance de chauffe au niveau de la résistance thermique de $\Phi_{th} = 12W$. En s'appuyant sur la valeur théorique de la conductivité thermique du cuivre et sachant que la surface de la barre vaut $\Sigma = 2cm^2$, quel devrait être la pente de la droite précédente ?

4) A son extrémité droite, la barre est couplée thermiquement à l'extérieur grâce à un échangeur constitué d'un radiateur à ailettes et d'un ventilateur extracteur de chaleur. Ceci permet de maintenir constante la température à cette extrémité (température proche de la température ambiante). Le couplage thermique réalisé par cet échangeur est évalué par le coefficient de transfert conducto-convectif h, d'après la loi de Newton :

$$\Phi_N(x = L) = h\Sigma[T(x = L) - T_{ext}]$$

En déduire l'expression de $T(x = 0)$ (ordonnée à l'origine de la droite précédente).

5) En déduire l'expression de la température dans la barre en fonction de x, T_{ext}, Φ_{th}, Σ, h, λ et L.

6.5 Exploitation des mesures

Lorsque l'acquisition est finie, il est possible d'exploiter les mesures effectuées sous Python au lien suivant :
https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/6a17-979955

6) Tracer alors la température (on ne prendra pas en compte le capteur C_1) en fonction de la position en régime permanent et faire une régression linéaire. En déduire une valeur de la conductivité thermique du cuivre λ. Comparer à la théorie.

7) Déterminer la valeur du coefficient de transfert conducto-convectif h.

6.6 Simulation de l'expérience avec la méthode des différences finies

Le programme Python fourni propose une résolution de l'équation de la diffusion thermique avec les conditions aux limites propres à notre expérience.

8) Expliquer ce qu'il se passe dans la partie '# Boucle temporelle'. On expliquera en particulier le traitement des points gauche et droit.

Données :
- masse volumique du cuivre : $\mu = 8{,}9.10^3 kg.m^{-3}$
- capacité thermique massique du cuivre : $c = 385J.K^{-1}.kg^{-1}$
- conductivité thermique du cuivre : $\lambda = 389W.m^{-1}.K^{-1}$

Pour plus de précisions, vous pouvez consulter les pages 6, 7, 8 du manuel utilisateur.
La notice du logiciel se trouve aux pages 12, 13, 14 du manuel utilisateur.

7 Questions de cours

1) Décrire les trois modes de transfert thermique.

2) Définir les notions de flux thermique, vecteur densité de flux thermique.

3) Donner la loi de Fourier pour une propagation unidimensionnelle selon (Ox). Définir les termes rentrant dans son expression. L'interpréter.

4) Démontrer l'équation de la diffusion thermique pour une propagation unidimensionnelle selon (Ox).

5) Comment appelle-t-on le coefficient entrant en compte dans l'équation de la chaleur ? Donner son expression. Quelle est sa signification physique ?

6) Résoudre l'équation de la chaleur en régime stationnaire dans le cassuivant :
On prendra le cas d'une tige pour rester avec un problème unidimensionnel. On suppose donc de plus qu'il n'y a aucun échange thermique entre la tige et le milieu extérieur par la surface latérale du cylindre (isolation thermique). Cette tige est cylindrique de section S, de longueur L et ses extrémités sont aux températures T_1 et T_2 $(T_1 > T_2)$. Donner l'expression de la température, densité de flux thermique et flux thermique. Commenter.

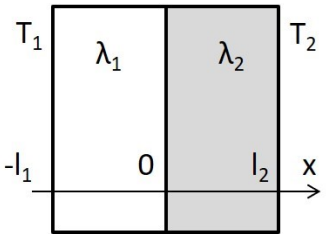
7) Définir la notion de résistance thermique. Donner l'analogie avec l'électricité.

8) On donne la loi de Newton : $j_N = h(T_S - T_0)$. Expliquer les différents termes entrant dans son expression. Définir une résistance thermique pour ce type de transfert thermique.

8 Exercices type oral

8.1 Contacts thermiques

Lorsqu'on touche deux objets à la même température, l'un en bois et l'autre en métal, celui en métal semble plus froid que celui en bois, malgré leurs températures identiques. L'objet de ce problème est d'étudier ce phénomène.
On étudie la conduction thermique suivant $\overrightarrow{u_x}$ entre deux solides 1 et 2, de même section S, portés aux températures extrémales T_1 et T_2. On note T_0 la température de la jonction.



1) Etablir, en régime permanent, l'expression de la température $T(x),\ x \in [-l_1, 0]\ et\ [0, l_2]$ en fonction de T_1, T_2, λ_1, λ_2, l_1, l_2. On exprimera T_0 en fonction des données précédentes.
2) Calculer numériquement T_0 pour un contact 1/2 métal/peau puis bois/peau (on prendra $l_1 = l_2$) où $T_1 = 20°C$, $T_2 = 37°C$. Conclure quant à la sensation de froid.
On pose R_{th1} et R_{th2} les résistances thermiques relatives aux solides 1 et 2.
3) Comment exprimer ces résistances en fonction de l_1, l_2, λ_1, λ_2 et S, la surface en contact des deux solides ?
4) Etablir la valeur de la température T_0 de la jonction en fonction de T_1, T_2, R_{th1} et R_{th2}.
5) Envisager et commenter les cas $R_{th1} \gg R_{th2}$ et $R_{th1} = R_{th2}$.
6) Comparer avec les résultats de la question 1.
Données :

	métal	corps humain	bois
$\lambda(W.m^{-1}.K^{-1})$	350	$6{,}0.10^{-1}$	$7{,}5.10^{-1}$

8.2 Bilan entropique macroscopique

Les extrémités d'un cylindre C de section S, de longueur l, de conductivité thermique λ, sont portées aux températures $T(0) = T_1$ et $T(l) = T_2$. Les parois du cylindre sont parfaitement calorifugées. L'étude a lieu en régime permanent indépendant du temps. Toutes les réponses sont attendues en fonction de T_1, T_2, λ, S et l.
1) $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}\overrightarrow{u_x}\ avec\ \ j_{th} > 0$: quelle est l'inégalité entre T_1 et T_2 ?
2) Quel est le flux thermique Φ traversant une section droite de C ?
3) Quelle est la variation d'entropie dS de C pendant la durée dt ?
4) Quelle est l'entropie δS_{ech} échangée par C avec les sources extérieures à T_1 et T_2 pendant dt ?
5) Quelle est l'entropie $\delta S_{créé}$ dans C pendant dt ? Conclure.

8.3 Simple et double vitrage

On considère une pièce à la température $T_i = 20°C$. La température extérieure est $T_e = 5°C$. On étudie les transferts thermiques avec l'extérieur à travers une vitre en verre de conductivité thermique $\lambda = 1{,}15W.m^{-1}.K^{-1}$, de largeur 60 cm, de hauteur 60 cm et d'épaisseur 3mm. On suppose qu'il n'y a pas de flux sortant à travers les autres parois de la pièce. On se place en régime stationnaire.
1) Définir et calculer la résistance thermique de la vitre. En déduire le flux thermique sortant à travers le simple vitrage.
2) On remplace le simple vitrage par un double vitrage constitué d'une vitre de 3 mm d'épaisseur, d'une couche d'air de conductivité thermique $\lambda_{air} = 0{,}025W.m^{-1}.K^{-1}$, d'épaisseur 10 mm et d'une autre vitre identique à la première. Donner le schéma thermique équivalent. Calculer le flux thermique sortant à travers le double vitrage et les différentes températures dans le double vitrage. Interpréter.

8.4 Chauffage d'une pièce

On souhaite maintenir constante la température d'une pièce à $T_i = 20°C$. La résistance thermique des 4 murs et du sol est $R_{th1} = 10{,}0.10^{-3}K.W^{-1}$. La résistance thermique du plafond et des tuiles est$R_{th2} = 2{,}0.10^{-3}K.W^{-1}$. La température de l'extérieur est $T_e = 10°C$. On se place en régime stationnaire.
1) Calculer la puissance thermique P à apporter à la pièce pour maintenant constante la température.

2) On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique de ce matériau afin de réaliser une économie de 50% sur la puissance thermique.

8.5 Isolant

Une couche d'isolant d'épaisseur $d = 10cm$ et de conductivité thermique $\lambda = 0{,}04W.m^{-1}.K^{-1}$ a une face maintenue à la température $T_1 = 100°C$. L'autre face est refroidie par convection par un courant d'air à $T_0 = 25°C$ qui doit maintenir sa température à la valeur de $T_S = 30°C$ (en régime permanent).

Calculer quelle doit être la valeur du coefficient h défini dans la loi de Newton : $j_N = h(T_S - T_0)$. On résoudra d'abord le problème sans faire appel à la notion de résistances thermiques, puis en les utilisant. Quel paramètre peut-on adapter simplement pour obtenir cette valeur ?

8.6 Ailette de refroidissement

On considère une barre de cuivre cylindrique de rayon $a = 5mm$, de longueur L. En $x = 0$, la barre de cuivre est en contact avec un milieu à la température $T_0 = 330K$. Tout le reste de la tige est en contact avec l'air ambiant de température uniforme $T_e = 300K$. On appelle $\lambda = 400W.m^{-1}.K^{-1}$ la conductivité thermique du cuivre et $h = 12W.m^{-2}.K^{-1}$ le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de cuivre et l'air. On se place en régime stationnaire. On pose $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$. On considère que la longueur de la tige est quasi-infinie.

On rappelle la loi de Newton :

La densité de flux thermique sortant à travers la surface d'un solide en contact avec un fluide est proportionnelle à l'écart entre la température T_S de la surface du solide et le température T_0 du fluide : $j_N = h(T_S - T_0)$

1) Faire un schéma en explicitant le bilan de puissance en régime stationnaire.

2) Déterminer le profil de température T(x) en tout point de la barre de cuivre.

9 DM pour le 28/11/2022

9.1 CCP TSI 2020

L'eau liquide d'un grand lac est à la température de congélation $T_E = 0$ °C. L'air au-dessus du lac est à la température $T_A = -10$ °C. Ces deux températures sont supposées constantes. À l'instant initial, l'eau est liquide puis le lac se couvre progressivement d'une couche de glace (**figure 7**).

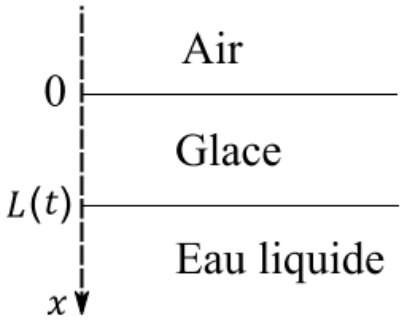


Figure 7 - Formation d'une couche de glace à la surface d'un lac

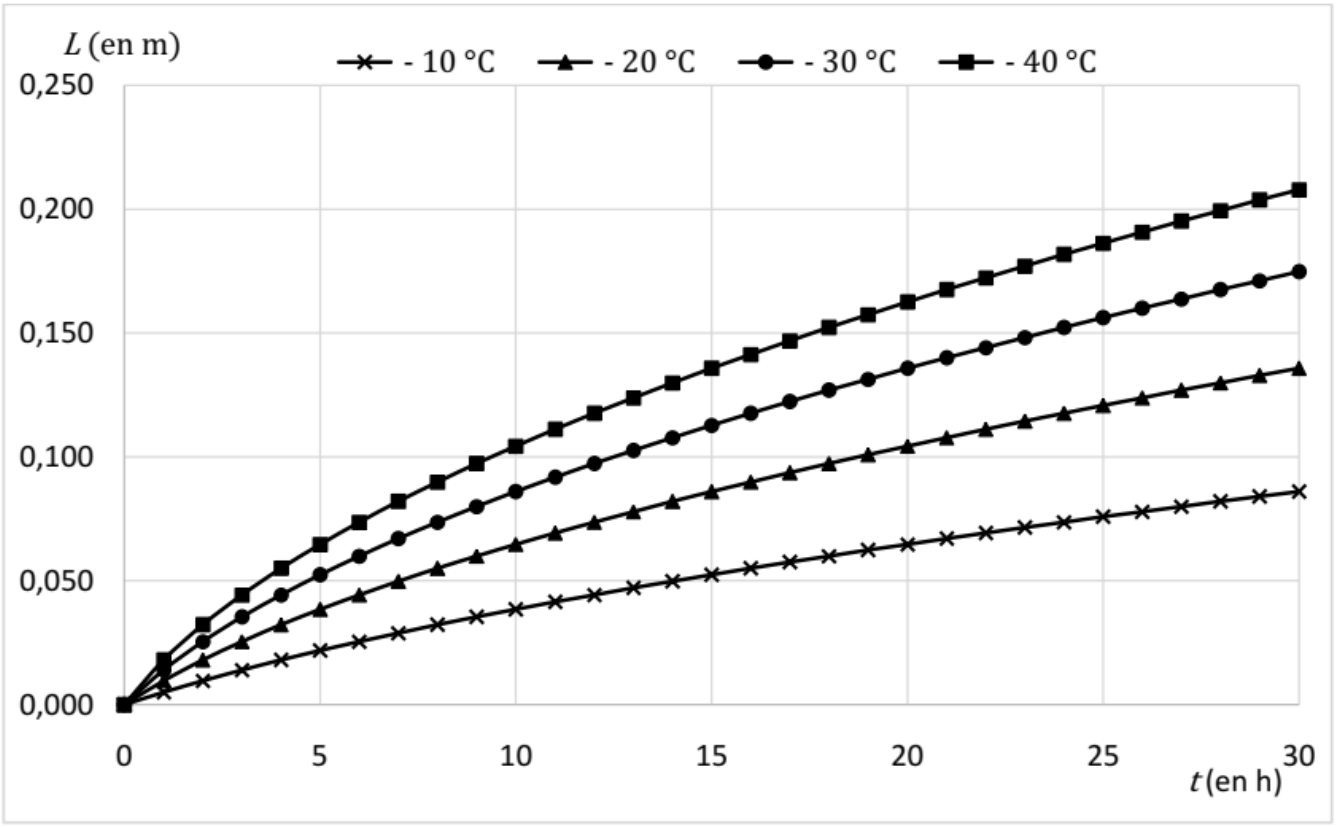


Figure 8 - Simulation graphique représentant l'épaisseur de la couche de glace L en fonction du temps t pour différentes températures T_A de l'air

On suppose que la température $T(x,t)$ ne dépend que du temps et d'une seule coordonnée d'espace, que la glace est un milieu isotrope et que la pression est constante.
L'épaisseur de la couche de glace à l'instant t est notée $L(t)$. À l'instant $t = 0$, $L(0) = 0$.
Le transfert thermique de la glace vers l'air est modélisé par la loi de Newton : $\varphi = h(T_0(t) - T_A)$ avec φ le flux thermique surfacique, $T_0(t) = T(0,t)$ la température de la glace en $x = 0$ et h le coefficient de transfert en W m^{-2} K^{-1}. Le référentiel choisi est associé à l'interface entre l'air et la glace.
La masse volumique de la glace, supposée incompressible et indilatable, est notée ρ ; la conductivité thermique de la glace est notée λ et la capacité calorifique massique de la glace est notée c. Ces grandeurs associées à la glace sont supposées indépendantes de la température et de la pression.

Q34. Citer trois modes de transfert thermique.

Q35. En utilisant la loi de Fourier, donner l'expression du vecteur densité de flux thermique noté $\overrightarrow{j_{th}}$ à l'intérieur de la glace.

Q36. À l'aide d'un bilan thermique local à une dimension sur un parallélépipède de surface S et d'épaisseur dx, établir une relation différentielle entre la température et la norme du vecteur densité de flux thermique au sein de la glace.

Q37. En déduire l'équation de la diffusion thermique :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \qquad (4)$$

Q38. En se plaçant dans le cadre de l'approximation quasi stationnaire, montrer que pour $0 \leq x \leq L(t)$:

$$T(x,t) = T_0(t) + \left(T_E - T_0(t)\right)\frac{x}{L(t)}. \qquad (5)$$

Q39. Déduire de la continuité du flux thermique en $x = 0$ l'expression de $L(t)$ en fonction de $T_0(t)$:

$$L(t) = \frac{\lambda(T_E - T_0(t))}{h(T_0(t) - T_A)}. \qquad (6)$$

Q40. On admet que l'épaisseur de la couche de glace en fonction du temps est représentée par la simulation graphique en **figure 8**. Au bout de 20 heures, les joueurs de hockey peuvent-ils considérer que la glace est suffisamment solide pour pouvoir jouer dessus ?

Q41. En utilisant la **figure 8**, commenter puis expliquer l'évolution de la vitesse de formation de la glace pour une même température de l'air T_A, puis pour différentes températures de l'air T_A.

Q42. De quelle autre grandeur, encore non citée jusqu'à présent, a-t-on eu besoin pour résoudre numériquement le problème et proposer la simulation en **figure 8** ? Donner sa définition et préciser l'unité.