Electrostatique

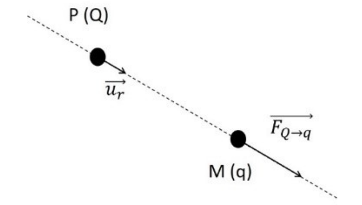
Force électrostatique créé par charge ponctuelle

<u>Loi de Coulomb</u>

Soit une particule chargée en P de charge Q, respectivement M de charge q. On note $r = PM$ et $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$, et la permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12} F.m^{-1}$

Force électrostatique (ou de Coulomb) = force exercée par la charge Q sur q:

$$\boxed{\overrightarrow{F_{Q\to q}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\overrightarrow{u_r} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3}}$$



si Q et q de même signe

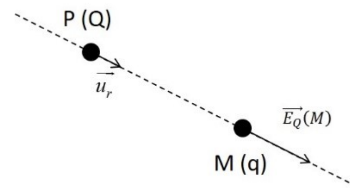
<u>Remarque</u> : Force conservative qui dérive d'une énergie potentielle, $E_{p,el}$

$$E_{p,el}(M) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte$$

Champ électrostatique créé par charge ponctuelle

Le **champ électrostatique** ($V.m^{-1}$) créé par Q en M est :

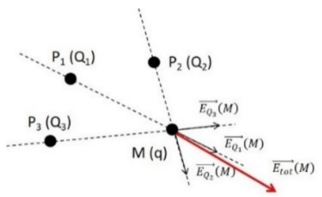
$$\boxed{\overrightarrow{E_Q}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3}}$$



<u>Remarque</u> : Le champ électrostatique obéit au principe de superposition.

Le champ électrostatique total $\overrightarrow{E_{tot}}(M)$ est égal à la superposition des champs électrostatiques créés par chacune des charges ponctuelles Q_i au point M :

$$\boxed{\overrightarrow{E_{tot}}(M) = \sum_i \overrightarrow{E_{Q_i}}(M)}$$



Potentiel électrostatique

<u>Relation locale</u> :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)}$$

Opérateur **gradient** en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_z}}$$

<u>Différence de potentiel</u> entre deux points A et B = circulation du champ électrostatique entre ces points.

$$\boxed{V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}}$$

Circulation du champ électrostatique entre A et B :

$$\boxed{C = \int_A^B \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}}$$

<u>Propriété</u> : Le champ électrostatique est dit à **circulation conservative** : $\oint_C \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = 0$

Pour une charge ponctuelle Q placée à l'origine du repère, agissant sur une particule de charge q en M, on retrouve les expressions et équivalences suivantes.

L'énergie potentielle électrostatique d'une charge ponctuelle q se trouvant en un point M placée dans un champ électrostatique extérieur $\vec{E}$ peut s'écrire sous la forme :

$$q\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}(E_{p,el})$$

Force et énergie potentielle ➡	Lien ➡	Champ et potentiel
$\overrightarrow{F_{Q\to q}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\overrightarrow{u_r}$	$\overrightarrow{F_{Q\to q}} = q\vec{E}(M)$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r}$
$E_p(M) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte$	$E_p(M) = qV(M)$	$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte$
$E_p(A) - E_p(B) = \int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}$	Relation intégrale	$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}$
$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$	Relation locale	$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$

Topographie du champ électrostatique

<u>Définitions</u> :

Le champ électrique est tangent à des courbes appelées **lignes de champ** qui sont orientées dans le sens du champ.

Un **tube de champ** est formé par un ensemble de lignes de champ qui s'appuyant sur un contour fermé.

Une **surface équipotentielle** est une surface formée d'un ensemble de points au même potentiel.

Propriétés :

- les lignes de champ électrique divergent à partir des charges positives et convergent vers les charges négatives.
- les lignes de champ électrique sont perpendiculaires en tout point à une surface équipotentielle.
- les lignes de champ électrique sont orientées vers les potentiels décroissants.

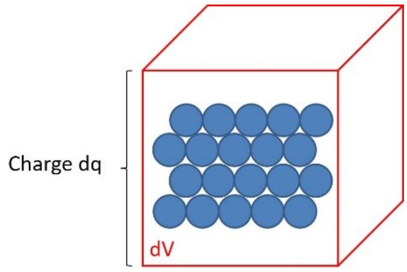
Distributions continues de charges

Distribution volumique de charges électriques

Densité volumique de charges ρ ($C.m^{-3}$) :

$$\boxed{\rho = \frac{dq}{dV}}$$

Charge totale : $Q = \int_Q dq = \iiint_V \rho dV$

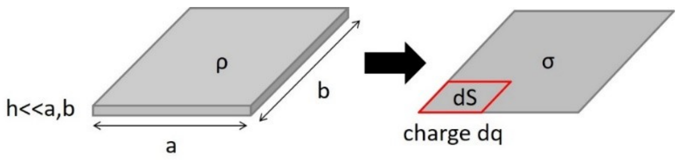


Distribution surfacique de charges électriques

Densité surfacique de charges σ ($C.m^{-2}$) :

$$\boxed{\sigma = \frac{dq}{dS}}$$

Charge totale : $Q = \int_Q dq = \iint_S \sigma dS$

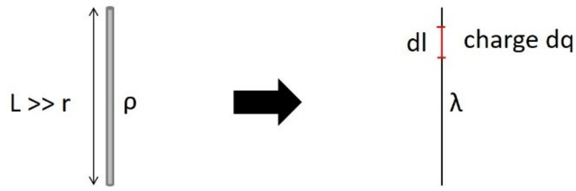


Distribution linéique de charge électrique

Densité linéique de charges λ ($C.m^{-1}$) :

$$\boxed{\lambda = \frac{dq}{dl}}$$

Charge totale : $Q = \int_Q dq = \int_L \lambda dl$



Symétries et invariances du champ électrostatique

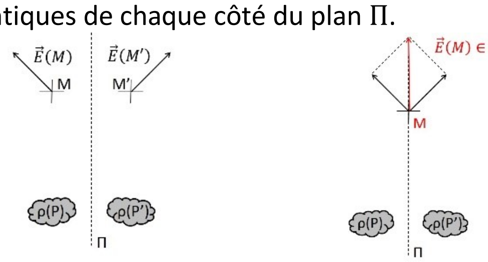
Principe de Curie :
Lorsque des causes produisent des effets, les symétries des causes doivent se retrouver dans celles des effets.

Symétries de la distribution de charges

Plan de symétrie Π = plan de symétrique géométrique et charges identiques de chaque côté du plan Π.

Si le plan Π est un plan de symétrie de la distribution de charge, alors champs électrostatiques symétriques par rapport à Π.

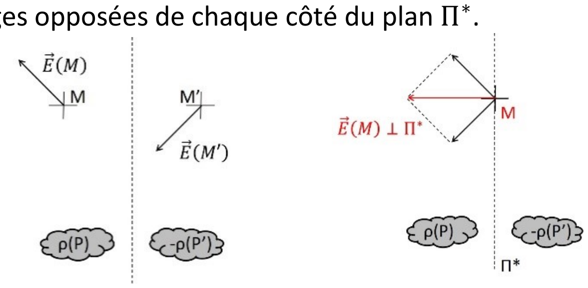
Si M appartient au plan de symétrie Π, alors le champ électrostatique est inclus dans le plan de symétrie Π.



Plan d'anti-symétrie Π^* = plan de symétrique géométrique et charges opposées de chaque côté du plan Π^*.

Si le plan Π^* est un plan d'anti-symétrie de la distribution de charge, alors champs électrostatiques anti-symétriques par rapport à Π^*.

Si M appartient au plan d'anti-symétrie Π^*, alors le champ électrostatique est perpendiculaire au plan d'anti-symétrie Π^*.



Invariances de la distribution de charges

Invariance par translation suivant un axe : champ électrostatique indépendant de la coordonnée selon l'axe.

Invariance par rotation autour d'un axe : champ électrostatique indépendant de la coordonnée angulaire.

Théorème de Gauss

Flux du champ électrostatique à travers une surface S = intégrale du champ à travers cette surface.

$$\phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Sur une surface Σ est fermée :

$$\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

<u>**Théorème de Gauss**</u> : Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée Σ (surface de Gauss) est égal au rapport de la charge intérieure (à cette surface) à la permittivité du vide :

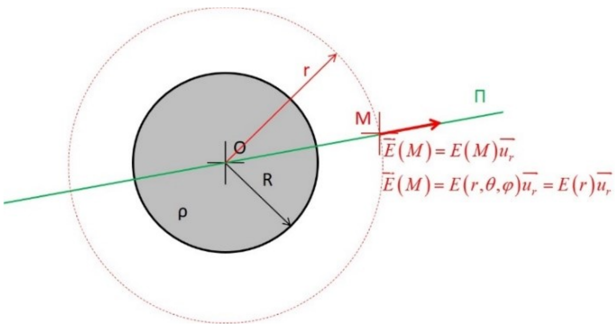
$$\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Analogies entre champ électrostatique et champ de gravitation :

Champ électrique	**Champ de gravitation**
Force de Coulomb : $\overrightarrow{F_{Q\to q}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\overrightarrow{u_r}$	Force gravitationnelle : $\overrightarrow{F_{M\to m}} = -G\frac{Mm}{r^2}\overrightarrow{u_r}$
Charge : q	Masse : m
Constante : $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	Constante : $-G$
Champ électrique : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r}$	Champ de gravitation : $\vec{G}(M) = -G\frac{M}{r^2}\overrightarrow{u_r}$
Théorème de Gauss : $\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$	Théorème de Gauss : $\oiint_\Sigma \vec{G}\cdot\vec{dS} = -4\pi G M_{int}$

Sphère uniformément chargée en volume

<u>Plans de symétrie</u> de la distribution de charges : plans passant par le centre de la sphère et par le point $M(r,\varphi,\theta)$. Le champ électrique sera donc compris dans l'intersection de ces deux plans : $\vec{E} = E(M)\overrightarrow{u_r}$
<u>Invariance par rotation</u> de la distribution de charges autour de O, d'où : $\vec{E} = E(r,\varphi,\theta)\overrightarrow{u_r} = E(r)\overrightarrow{u_r}$
<u>Surface de Gauss</u> (Σ) : sphère de centre O, de rayon r



<u>Flux</u> : $\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint_\Sigma E(r)\overrightarrow{u_r}\cdot dS\overrightarrow{u_r} = \oiint_\Sigma E(r)dS = E(r)\oiint_\Sigma dS = E(r)4\pi r^2$

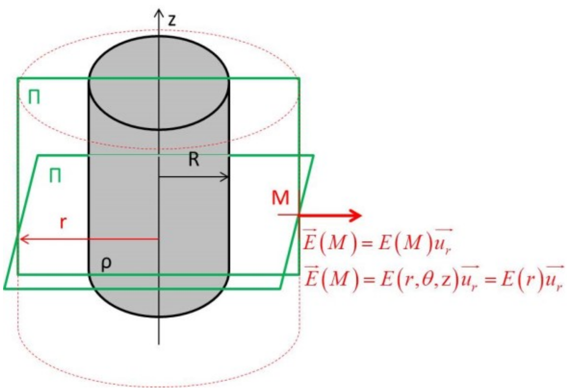
<u>Charge intérieure</u> : $\begin{cases} r \le R \quad Q_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho \\ r > R \quad Q_{int} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho \end{cases}$

<u>Champ électrostatique</u> : $\begin{cases} r \le R \quad \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\overrightarrow{u_r} \\ r > R \quad \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r} \end{cases}$

$r > R$: $\vec{E} = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$ = Champ électrostatique créé par une chargz placée à l'origine de charge $q = Q_{int} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$

Cylindre « infini » uniformément chargé en volume

<u>Plans de symétrie</u> de la distribution de charges : plan contenant l'axe du cylindre et le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre passants par le point M. Le champ électrique sera donc compris dans l'intersection de ces deux plans : $\vec{E} = E(M)\overrightarrow{u_r}$
<u>Invariance par translation</u> le long de l'axe du cylindre et par <u>rotation</u> autour du même axe, d'où : $\vec{E} = E(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r} = E(r)\overrightarrow{u_r}$
<u>Surface de Gauss</u> (Σ) : cylindre fermé d'axe Oz, de rayon r et de hauteur h

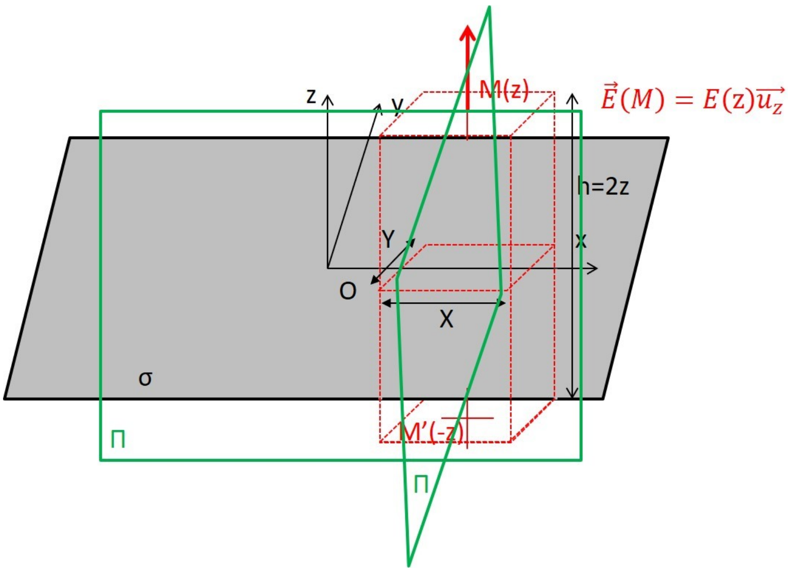


<u>Flux</u> : $\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{latérale} E(r)\overrightarrow{u_r}\cdot dS\overrightarrow{u_r} + \iint_{transversales} E(r)\overrightarrow{u_r}\cdot dS\overrightarrow{u_z} = \iint_{latérale} E(r)dS = E(r)2\pi rh$

<u>Charge intérieure</u> : $\begin{cases} r \le R \quad Q_{int} = \pi r^2 h\rho \\ r > R \quad Q_{int} = \pi R^2 h\rho \end{cases}$

<u>Champ électrostatique</u> : $\begin{cases} r \le R \quad \vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r\overrightarrow{u_r} \\ r > R \quad \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r} \end{cases}$

Plan « infini » uniformément chargé en surface



<u>Plans de symétrie</u> de la distribution de charges : plans contenant l'axe Mz. Le champ électrique sera donc compris dans l'intersection de ces deux plans : $\vec{E} = E(M)\overrightarrow{u_z}$

Invariance par translation selon x et y de la distribution de charge : $\vec{E} = E(x,y,z)\overrightarrow{u_z} = E(z)\overrightarrow{u_z}$

<u>Parité</u> : plan contenant la distribution de charge (xOy) = plan de symétrie de la distribution de charge. Champ électrostatique symétrique par rapport à ce plan. Donc : $E(-z) = -E(z)$

La fonction est impaire.

<u>Surface de Gauss</u> (Σ) : Parallélépipède de largeur X selon (Ox), Y selon (Oy) et de hauteur h selon (Oz) centré sur le plan xOy

<u>Flux</u> :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{latérale} E(z)\overrightarrow{u_z} \cdot dS\overrightarrow{u_r} + \iint_{en(z)} E(z)\overrightarrow{u_z} \cdot dS\overrightarrow{u_z} + \iint_{en(-z)} E(-z)\overrightarrow{u_z} \cdot dS(-\overrightarrow{u_z})$$

$$= \iint_{en(z)} E(z) \cdot dS + \iint_{en(-z)} E(z) \cdot dS = 2E(z) \iint_{en(z)} dS = 2E(z)XY \; pour \; z > 0$$

<u>Charge intérieure</u> : $Q_{int} = XY\sigma$

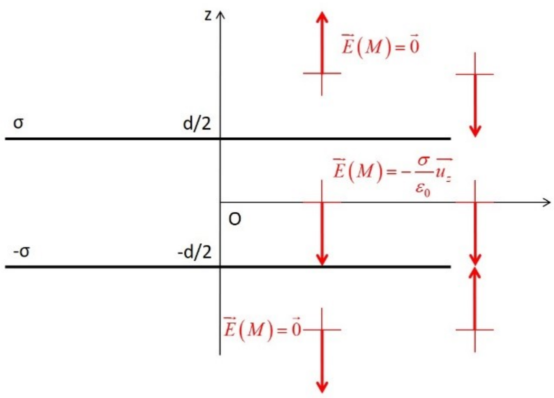
<u>Champ électrostatique</u> : $\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \; z > 0 \\ \vec{E} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \; z < 0 \end{cases}$

Condensateur plan

Armature supérieure : $\begin{cases} \overrightarrow{E_1} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \quad pour \; z > \dfrac{d}{2} \\ \overrightarrow{E_1} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \quad pour \; z < \dfrac{d}{2} \end{cases}$

Armature inférieure: $\begin{cases} \overrightarrow{E_2} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \quad pour \; z > -\dfrac{d}{2} \\ \overrightarrow{E_2} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \quad pour \; z < -\dfrac{d}{2} \end{cases}$

Théorème de superposition : $\begin{cases} \vec{E} = \vec{0} \quad pour \; z > \dfrac{d}{2} \\ \vec{E} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \quad pour \; -\dfrac{d}{2} < z < \dfrac{d}{2} \\ \vec{E} = \vec{0} \quad pour \; z < -\dfrac{d}{2} \end{cases}$



Différence de potentiel : $U = V\left(\frac{d}{2}\right) - V\left(-\frac{d}{2}\right) = \int_{\frac{d}{2}}^{-\frac{d}{2}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = Ed$

Capacité d'un condensateur plan : $C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ avec $Q = \sigma S$