Propagation

Hypothèses : dans le **vide**, en **absence de charges et courants**

Equation de propagation du champ électromagnétique

Equations de Maxwell :	Equation de propagation, équation d'onde, **équation de d'Alembert** :
$(MG)\quad div\vec{E}=0 \quad (MA)\quad \overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ $(MT)\quad div\vec{B}=0 \quad (MF)\quad \overrightarrow{rot}\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\vec{\Delta}\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}$ $\vec{\Delta}\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}$

Célérité de l'onde ou **vitesse de propagation** de l'onde :

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3.10^8 m.s^{-1} \quad \Rightarrow \quad \vec{\Delta}\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0} \quad et \quad \vec{\Delta}\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

Onde plane progressive

Résolution générale d'une équation d'onde scalaire à une dimension

Soit $s(x,y,z,t)$ vérifiant $\Delta s-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0$

Définitions :
Onde **plane** si, à chaque instant, $s(x,y,z,t)$ a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à la **direction de propagation** (définie par un vecteur unitaire $\vec{n}$).
Onde plane **progressive** : le signal se propage dans un sens déterminé.

Propriété :
Solutions de l'**équation de propagation** selon x = superposition de deux **ondes planes progressives** :

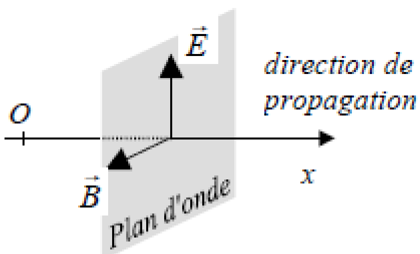
$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0 \quad \Rightarrow \quad s(x,t)=f_1(x-vt)+f_2(x+vt) \quad ou \quad s(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{v}\right)$$

Solutions de l'équation de propagation du champ électromagnétique

Hypothèse : propagation selon les x croissants

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}\\ \dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}=\vec{E}\left(t-\frac{x}{c}\right)=\begin{pmatrix}E_x\left(t-\frac{x}{c}\right)\\ E_y\left(t-\frac{x}{c}\right)\\ E_z\left(t-\frac{x}{c}\right)\end{pmatrix} \quad et \quad \vec{B}=\vec{B}\left(t-\frac{x}{c}\right)=\begin{pmatrix}B_x\left(t-\frac{x}{c}\right)\\ B_y\left(t-\frac{x}{c}\right)\\ B_z\left(t-\frac{x}{c}\right)\end{pmatrix}$$

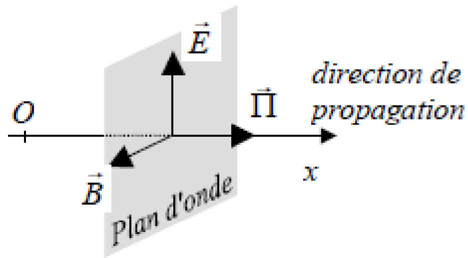
Propriétés :	
D'après (MG) et (MT), les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires à la direction de propagation, on les qualifie de **transverses**.	$\vec{E}=\vec{E}\left(t-\frac{x}{c}\right)=\begin{pmatrix}0\\ E_y\left(t-\frac{x}{c}\right)\\ E_z\left(t-\frac{x}{c}\right)\end{pmatrix} \quad et \quad \vec{B}=\vec{B}\left(t-\frac{x}{c}\right)=\begin{pmatrix}0\\ B_y\left(t-\frac{x}{c}\right)\\ B_z\left(t-\frac{x}{c}\right)\end{pmatrix}$ $\vec{B}=\dfrac{1}{c}\vec{n}\wedge\vec{E}$



Direction de propagation donnée par le vecteur unitaire $\vec{n}$

Aspect énergétique

Densité volumique d'énergie électromagnétique, u, équirépartie entre terme électrique et terme magnétique.	Vecteur de Poynting = densité surfacique de puissance rayonnée, dirigé selon la direction de propagation. L'énergie d'une OPP dans le vide se propage à la célérité, c.	Puissance rayonnée à travers une surface S = flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. Elle est égale à la diminution de l'énergie électromagnétique dans un volume V : $-\frac{dU}{dt} = P_{rayonnée}$
$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$	$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$	$P_{rayonnée} = \iint_S \vec{\Pi}\cdot\overrightarrow{dS}$



Onde plane progressive monochromatique

Retour sur l'équation d'onde scalaire

Soit $s(x,y,z,t)$ vérifiant $\Delta s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

Définition :
Une onde plane progressive est dite **monochromatique** si c'est une fonction sinusoïdale de fréquence f.
Une OPPM se propageant à la vitesse v selon la direction donnée par un vecteur unitaire $\vec{n}$ s'écrit sous la forme :

$$s(x,y,z,t) = s_m\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)$$

où $\vec{r}$ représente le vecteur position tel que : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$ en coordonnées cartésiennes.
Elle est caractérisée par : - sa **pulsation**, ω, ou sa **fréquence**, f, ou sa période temporelle, T :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

- son **vecteur d'onde**, $\vec{k}$, ou sa **longueur d'onde**, λ :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = \frac{\omega}{v}\vec{n}$$

Elle présente une **double-périodicité** temporelle de période T et spatiale de période λ telle que :

$$\lambda = vT$$

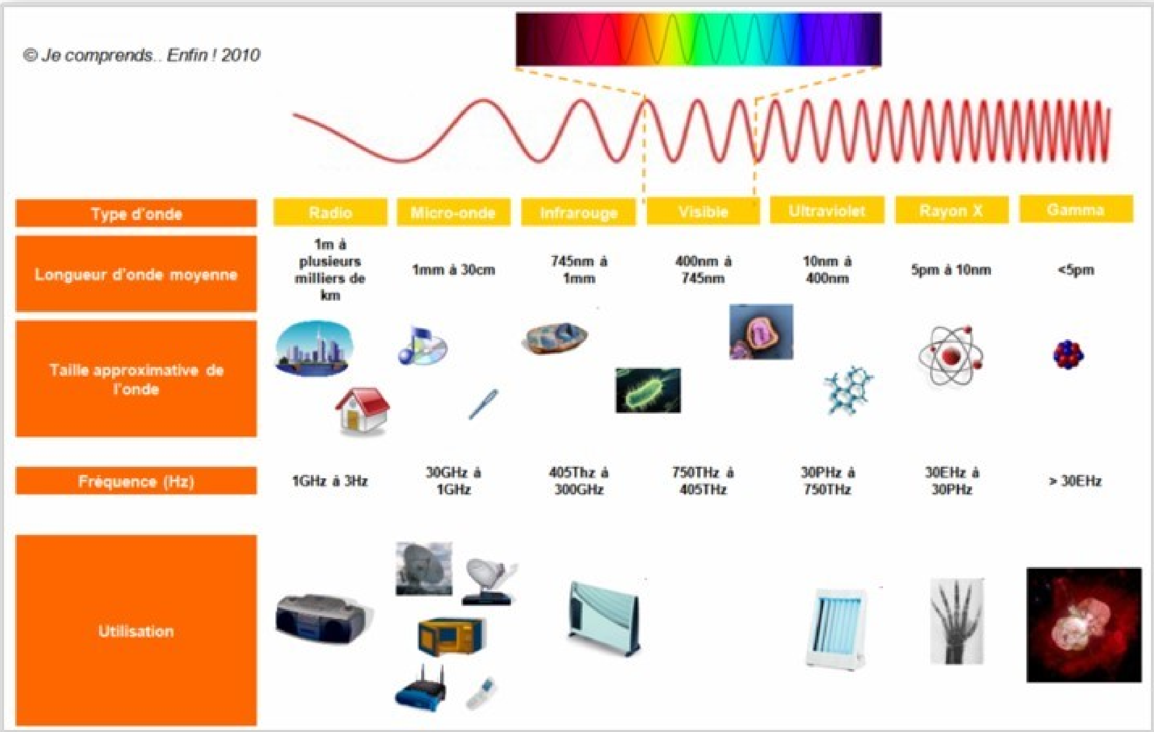
Application au champ électromagnétique

Propagation unidimensionnelle selon les x croissants : $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y}\cos\left(\omega t - kx + \varphi_{0y}\right) \\ E_{0z}\cos\left(\omega t - kx + \varphi_{0z}\right) \end{pmatrix}$

Propagation 3D : $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x}\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_{0x}\right) \\ E_{0y}\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_{0y}\right) \\ E_{0z}\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_{0z}\right) \end{pmatrix}$

Relation de dispersion :	Champs électrique et magnétique forment avec le vecteur d'onde un trièdre direct :
$k = \frac{\omega}{c}$	$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\wedge\vec{E}$

Notation complexe et polarisation rectiligne suivant Oy : $\vec{E} = \underline{\vec{E_0}}e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ $\quad avec \quad$ $\underline{\vec{E_0}} = E_{0y}e^{j\varphi_{0y}}\overrightarrow{u_y}$

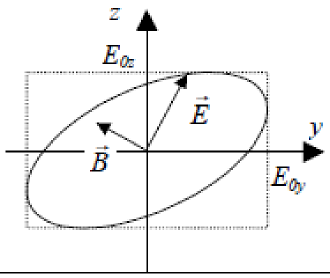


Etats de polarisation d'une onde plane progressive monochromatique

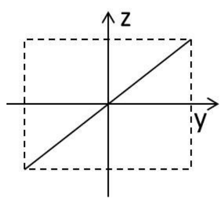
Définition :

La **polarisation** d'une OPPH est définie à partir de son vecteur $\vec{E}$, comme la nature de la courbe décrite par l'extrémité de $\vec{E}$ dans un plan d'onde.

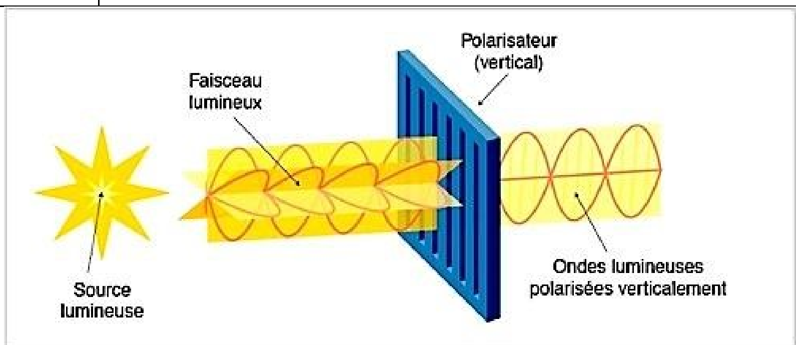
Polarisation elliptique (cas général) :



Polarisation rectiligne : l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ décrit une droite



Mise en évidence d'une polarisation rectiligne :
On place un autre polariseur à la suite du premier.
Si les deux polariseurs ont leur axe de transmission perpendiculaire, le champ électrique à la sortie de l'analyseur est nul.



Propagation unidimensionnelle selon les x croissants et polarisation rectiligne suivant Oy :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y}\,cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \\ 0 \end{pmatrix} = E_{0y}\,cos(\omega t - kx + \varphi_{0y})\,\overrightarrow{u_y}$$

Propagation 3D et polarisation rectiligne suivant Oy : $\vec{E} = E_{0y}\,cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_{0y})\,\overrightarrow{u_y}$

Réflexion sous incidence normale d'une OPPM polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait

Conducteur parfait : $\gamma \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \to \vec{0}, \quad \rho \to 0, \quad \vec{B} \to \vec{0}, \quad \vec{j} = \vec{0}$

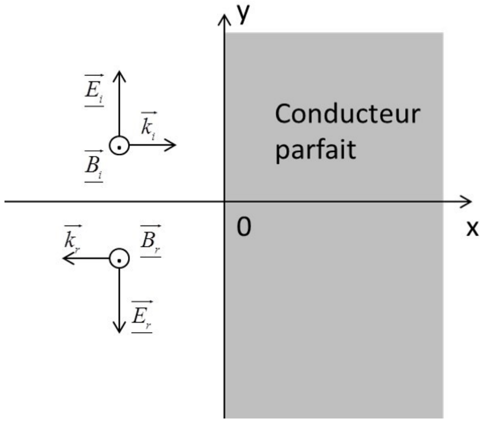
Champ électrique incident dans le vide $x < 0$: $\overrightarrow{E_i} = E_{0i}\, cos(\omega t - kx)\, \overrightarrow{u_y}$

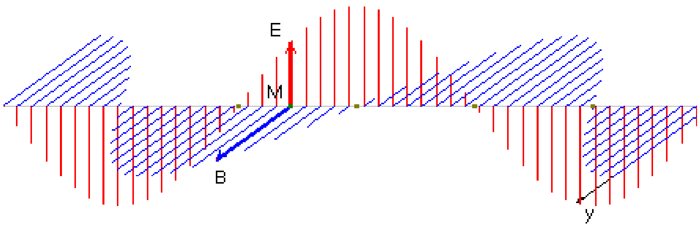
En $x > 0$: conducteur parfait

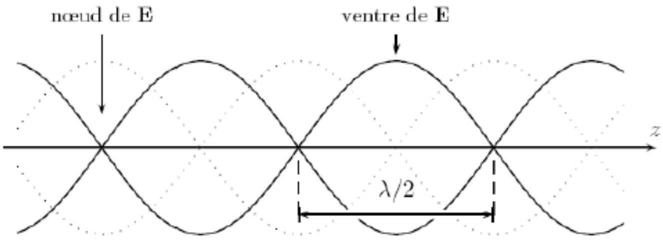
Relation de passage pour le champ $\vec{E}$ en $x = 0$, champ réfléchi : $\overrightarrow{E_r} = -E_{0i}\, cos(\omega t + kx)\, \overrightarrow{u_y}$

Superposition des deux donne : $\overrightarrow{E_{vide}} = 2E_{0i}\, sin(\omega t)\, sin(kx)\, \overrightarrow{u_y}$

Propriété : Réflexion d'une onde électromagnétique sous incidence normale sur un conducteur parfait = **réflexion totale** avec un déphasage de π du champ électrique et un déphasage nul pour le champ magnétique. La superposition des ondes incidentes et réfléchies sur un conducteur parfait donne naissance à une onde dont les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : l'onde résultante est une **onde stationnaire**. L'onde ne se propage plus. Elle oscille sur place. L'onde stationnaire résultante ne transporte pas d'énergie.







Applications aux cavités à une dimension

Conducteur parfait pour $x < 0$ et $x > a$ = onde résultante stationnaire

$$\vec{E} = 2E_0\, sin(\omega t)\, sin(kx)\, \overrightarrow{u_y}$$

Relation de passage pour le champ $\vec{E}$ en $x = a$:

$$sin(ka) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_p = \frac{2a}{p} \quad p \in \mathbb{N}$$

Seules longueurs d'onde pouvant exister dans la cavité.

L'entier p est appelé mode propre de l'onde stationnaire.