

CONCOURS BLANC COMMUN

Lundi 11 mars 2024 – Durée : 4 h 00

On notera son nom en haut de chaque page et chaque page doit être numérotée.

- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la **rédaction**.
- La **présentation**, la **lisibilité**, l'**orthographe**, la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les **résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte**.
- Toute application numérique ne comportant **pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points**.
- Le candidat prendra soin de **bien numéroté les questions**.
- Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet est long et formé de 5 problèmes indépendants.

Chaque problème est lui-même composé de différentes sous-parties indépendantes.

Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre de votre choix, en prenant soin de noter précisément le numéro de la question traitée.

Il faut changer de copie :

Copie N°1	Copie N°2	Copie N°3	Copie N°4
Problème I : questions 1 à 15	Problème II : questions 16 à 41	Problème III : questions 42 à 49	Problème IV et V : questions 50 à 58

Les calculatrices sont interdites.

Ce sujet propose d'étudier quelques phénomènes physiques rencontrés en montagne. Il est constitué de cinq parties indépendantes. Les différentes sous-parties sont souvent également indépendantes.

Les questions portant la mention **Résolution de problème** ne sont pas guidées et nécessitent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent apparaître sur la copie et, si elles sont pertinentes, seront valorisées. Le barème accorde un poids significatif à ces questions.

Aide aux applications numériques		
$9,807 \times 0,998 \approx 9,787$	$\exp\left(\frac{2 \times 96500}{8,3 \times 298} 0,54\right) \approx 10^{18}$	$\frac{108}{6} = 18$
$\sqrt{2} \approx 1,4$	$1,4 \times 3,6 \approx 5,0$	$\sqrt{20} \approx 4,5$
$\frac{4,0}{1,4} \approx 3$	$8,20 \times 1,27 \approx 10,4$	

Dans tout le sujet, on modélise l'air comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g. mol}^{-1}$ et de coefficient isentropique (rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant) $\gamma = 1,4$.

On donne la capacité thermique massique à pression constante de l'air dans les conditions considérées ici :

$$c_p = 1,0 \times 10^3 \text{ J. K}^{-1}. \text{ kg}^{-1}$$

On note $R = 8,3 \text{ J. K}^{-1}. \text{ mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits, et $g = 9,8 \text{ m. s}^{-2}$ l'intensité de la pesanteur.

I. Le profil de pression

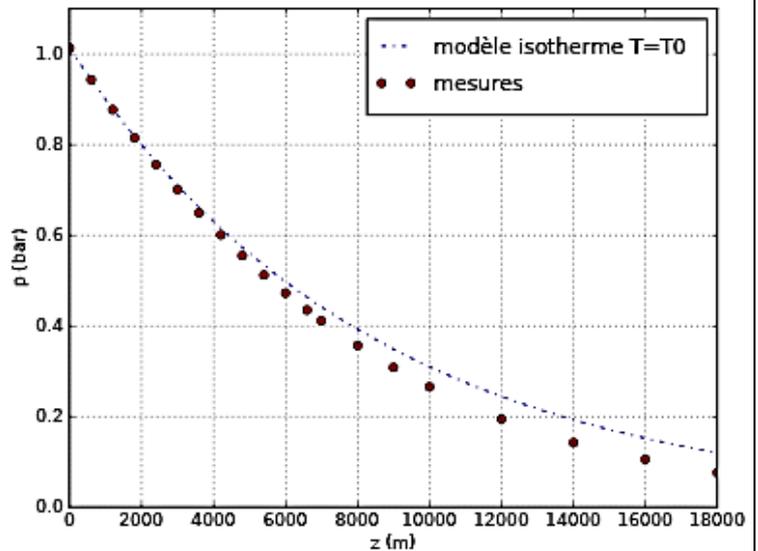
1. Modèle de l'atmosphère isotherme

Document 1 - Propriétés moyennes de l'air à haute altitude - en partie d'après relevés expérimentaux.

(Source : *Thermodynamique, une approche pragmatique, Cengel et al.*)

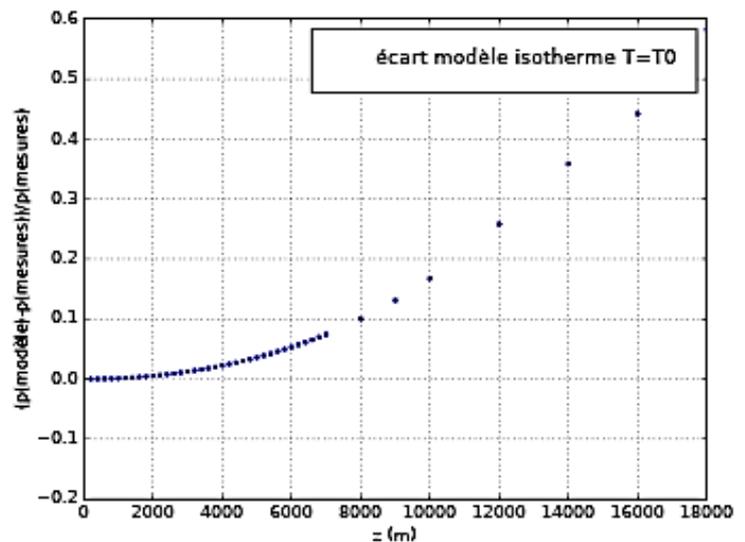
Altitude m	Température °C	Pression kPa	Accélération gravitationnelle g, m/s ²
0	15,00	101,33	9,807
200	13,70	98,95	9,806
400	12,40	96,61	9,805
600	11,10	94,32	9,805
800	9,80	92,08	9,804
1 000	8,50	89,88	9,804
1 200	7,20	87,72	9,803
1 400	5,90	85,60	9,802
1 600	4,60	83,53	9,802
1 800	3,30	81,49	9,801
2 000	2,00	79,50	9,800
2 200	0,70	77,55	9,800
2 400	-0,59	75,63	9,799
2 600	-1,89	73,76	9,799
2 800	-3,19	71,92	9,798
3 000	-4,49	70,12	9,797
3 200	-5,79	68,36	9,797
3 400	-7,09	66,63	9,796
3 600	-8,39	64,94	9,796
3 800	-9,69	63,28	9,795
4 000	-10,98	61,66	9,794
4 200	-12,3	60,07	9,794
4 400	-13,6	58,52	9,793
4 600	-14,9	57,00	9,793
4 800	-16,2	55,51	9,792
5 000	-17,5	54,05	9,791
5 200	-18,8	52,62	9,791
5 400	-20,1	51,23	9,790
5 600	-21,4	49,86	9,789
5 800	-22,7	48,52	9,785
6 000	-24,0	47,22	9,788
6 200	-25,3	45,94	9,788
6 400	-26,6	44,69	9,787
6 600	-27,9	43,47	9,786
6 800	-29,2	42,27	9,785
7 000	-30,5	41,11	9,785
8 000	-36,9	35,65	9,782
9 000	-43,4	30,80	9,779
10 000	-49,9	26,50	9,776
12 000	-56,5	19,40	9,770
14 000	-56,5	14,17	9,764
16 000	-56,5	10,53	9,758
18 000	-56,5	7,57	9,751

Document 2 - $P(z)$ d'après les données du tableau du Document 1 (points « mesures »), et d'après le modèle du sujet (« modèle isotherme $T = T_0$ »)



Document 3 - Tracé de l'écart relatif entre mesures et modèle isotherme :

$$\frac{P_{\text{modèle}}(z) - P_{\text{mesures}}(z)}{P_{\text{mesures}}(z)}$$



La pression atmosphérique décroît avec l'altitude. Cette partie propose d'étudier cet aspect. On note $P_0 = 1,0$ bar la pression atmosphérique au niveau du sol (en $z = 0$) et $P(z)$ sa valeur pour une altitude z . On modélise l'atmosphère comme :

- Étant statique,
- Étant isotherme (température notée T_0 , prise environ égale à 17°C),
- Se comportant comme un gaz parfait.

On choisit un axe z orienté vers le haut, $z = 0$ étant au niveau du sol.

1. Démontrer, à l'aide d'un bilan des forces sur un volume élémentaire de fluide situé entre les altitudes z et $z + dz$, que la pression satisfait à la relation suivante, où μ est la masse volumique de l'air :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\mu(z)g$$

2. Établir la relation entre la masse volumique $\mu(z)$ à l'altitude z , la pression $P(z)$, T_0 , R et M .

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $P(z)$, puis en déduire que la pression évolue selon la loi :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

avec H une constante dont on donnera l'expression en fonction de R , T_0 , g et M .

4. Calculer une valeur approchée de H en précisant son unité. Vérifier cette valeur grâce aux **Documents 1 à 3** fournis.

On se propose d'analyser l'accord entre les prévisions du modèle précédent et les relevés expérimentaux. De tels relevés, valables pour des conditions moyennes, sont présentés dans le tableau du **Document 1**. La pression $P(z)$ donnée par ce tableau est également tracée sur le graphique du **Document 2**, qui comporte aussi un tracé de la pression prédite par notre modèle. On pourra également utiliser le **Document 3**.

5. Jusqu'à quelle altitude les valeurs de la pression obtenues par ce modèle sont-elles en accord à mieux que 10% avec les données expérimentales ? Quelle est l'hypothèse de notre modèle qui semble la moins bien vérifiée, et qui peut expliquer les écarts importants à haute altitude ?

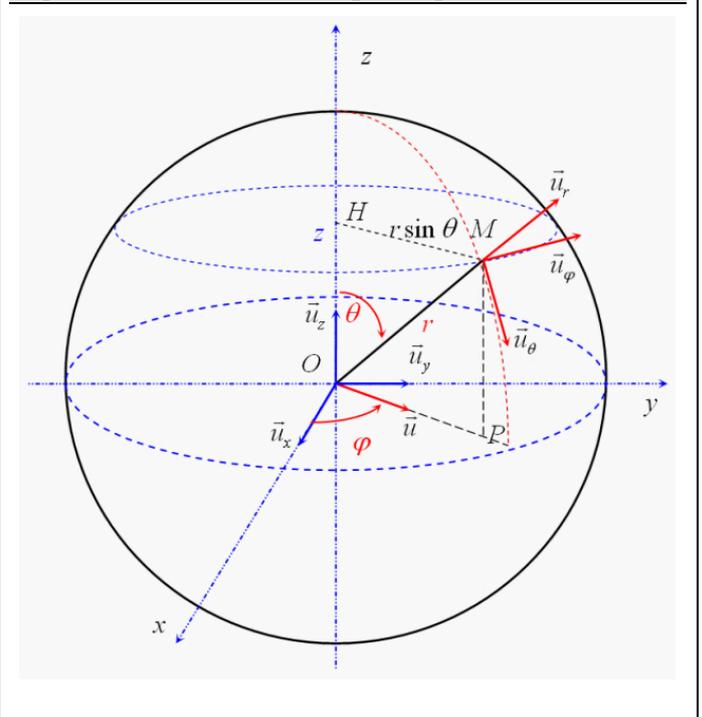
2. Etude du profil de pesanteur

On considère une boule chargée uniformément (densité volumique de charge électrique ρ), de rayon R . Cette distribution de charges produit un champ électrique \vec{E} . On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère sphérique $\mathcal{R}_{sph}(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ (**Figure 1**) où centre du repère, O , est aussi le centre de la boule.

La permittivité du vide est $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

6. Donner l'expression de la charge électrique totale, notée Q , portée par la boule, en fonction de ρ et de R .
7. En explicitant les invariances et les symétries du problème, donner les variables dont dépend le champ électrique \vec{E} , ainsi que sa direction en fonction des vecteurs de la base sphérique.
8. En utilisant le théorème de Gauss, et en s'appuyant sur un schéma, établir l'expression du champ électrique \vec{E} à l'intérieur et à l'extérieur de la boule.

Figure 1 - Coordonnées sphériques



Nous avons, dans la partie I.1., supposé l'intensité de pesanteur g constante. Or, celle-ci est plus faible à haute altitude.

Par analogie avec la sphère chargée étudiée précédemment, il est possible d'obtenir l'expression de $g(r)$, où r est la distance au centre de la Terre :

$$g(r) = \frac{GM_T}{r^2}$$

Cette expression est valable pour $r > R_T$, avec R_T le rayon de la Terre, M_T sa masse, et G la constante de gravitation universelle.

9. Rappeler les forces de Coulomb et gravitationnelle. Identifier les analogies entre ces deux forces.
10. Déterminer l'expression de g_0 , l'intensité de pesanteur pour une altitude nulle par rapport au sol ($z = 0$). Puis, en déduire l'expression de g en fonction de l'altitude z , du rayon terrestre R_T , et de g_0 .
11. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en z/R_T , montrer que l'expression de g pour $z \ll R_T$ s'écrit :

$$g \approx g_0 \left(1 - 2 \frac{z}{R_T}\right)$$

12. En déduire la valeur de l'intensité de pesanteur g à une altitude de 6,4 km et vérifier sa cohérence avec les données du **Document 1**. On prendra $R_T = 6400 \text{ km}$.

Ces très faibles variations justifient que l'on considère l'intensité de pesanteur constante g dans tout ce sujet.

3. Temps de cuisson d'un œuf à la coque

13. Sur votre feuille, dessiner l'allure du diagramme (P, T) de l'eau, où figurent les trois phases : solide, liquide et gaz, le point triple et le point critique.

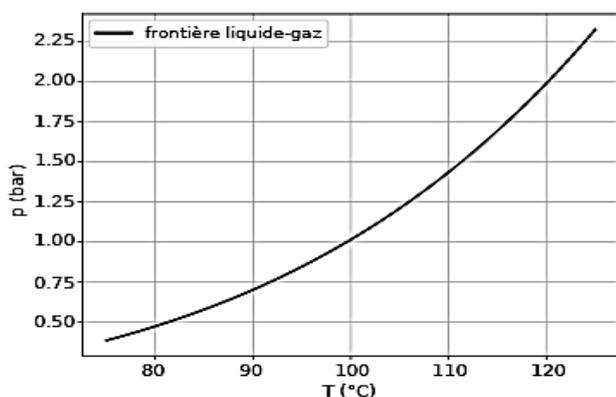
Des randonneurs préparent leur repas à une altitude de 2400 m. Ils souhaitent manger des œufs à la coque, pour lesquels on conseille traditionnellement une cuisson de 3 minutes dans l'eau bouillante.

La cuisson est bonne quand le jaune d'œuf atteint une température de 63°C . Un modèle simplifié permet d'obtenir le temps que doit passer l'œuf dans l'eau pour atteindre 63°C , en fonction de la température de l'eau dans laquelle il est plongé pour la cuisson (**Document 4** à droite).

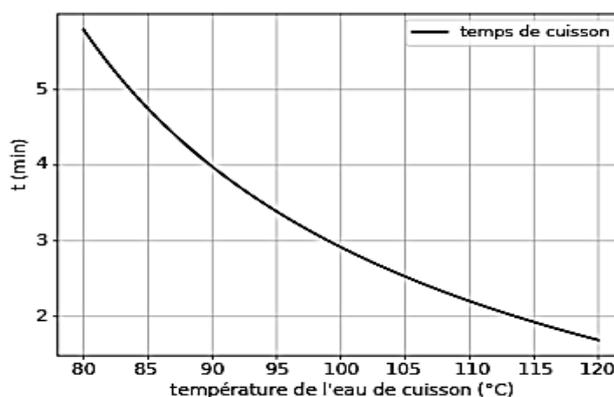
14. [Résolution de problème] Expliquer pourquoi le temps usuel de trois minutes ne sera pas adapté ici, et donner le temps de cuisson des œufs pour nos deux randonneurs. On utilisera, si besoin, tout document de la partie I.

Document 4 (Source : <http://newton.ex.ac.uk/teaching/CDHW/egg/>)

Zoom sur une portion du diagramme (P, T) de l'eau.



Temps de cuisson pour obtenir un œuf à la coque, en fonction de la température de l'eau de cuisson



CHANGER DE COPIE

II. Le repas en altitude

Pour préparer un repas chaud une fois arrivé au sommet d'une montagne, un randonneur utilise un réchaud à combustible solide pour chauffer de l'eau.

Document 5 – Set de cuisson (extrait du site marchand « monrechaud.com »)

Le set de cuisson Esbit® (popote/réchaud en aluminium anodisé dur, idéal pour les sorties en solo) comprend une casserole d'une capacité de 585 mL, un couvercle et un support de réchaud à combustible solide.

Le support de casserole permet de déposer une tablette de combustible solide Esbit® et fait office de pare-vent. Lors du transport, il se range à l'intérieur de la casserole.

L'ensemble est extrêmement léger et compact. Le set de cuisson Esbit® est livré avec un filet de rangement.



Document 6 – Tablettes de combustible solide

Vingt tablettes de 4 g de combustible solide permettent de recharger les réchauds pliants Esbit®. Elles peuvent être également utilisées pour allumer un feu de camp, un barbecue ou une cheminée. Deux tablettes de 4 grammes permettent de faire bouillir 0,25 litre d'eau en 5 minutes. Une tablette de 4 g brûle approximativement en 5 minutes.

Matériaux : substances non toxiques dont l'hexamine.

Informations complémentaires :

- Non explosif
- S'allume avec une allumette ou un briquet
- Pas d'étincelles
- Puissance de chauffe forte
- Pouvoir calorifique (PC) de l'hexamine : $7,103 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \approx 30 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Ne laisse pas de cendres après la combustion
- Aucune fumée visible
- Léger et compact
- Lorsqu'il est bien entreposé, le combustible solide Esbit® conserve ses caractéristiques techniques pendant de nombreuses années
- Fonctionne également à des températures inférieures à $0 \text{ }^\circ\text{C}$ et à haute altitude.

Données pour la partie II

Capacité thermique massique de l'eau liquide à pression constante : $c_{eau} \approx 4 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Masse volumique de l'eau liquide : $\mu_{eau} = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$

Enthalpie massique de vaporisation de l'eau sous 1 bar : $l_v = 2,0 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Données spécifiques à l'hexamine

Aspect : poudre blanche

Formule brute : $C_6H_{12}N_4$

Masse molaire : $M_h = 140 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masse volumique supposée indépendante de la température : $\mu_h = 1,33 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$

Les produits de combustion de l'hexamine dans l'air varient selon les conditions : diazote N_2 , eau H_2O et dioxyde de carbone CO_2 dans les conditions optimales.

Pouvoir calorifique de l'hexamine : $7,103 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \approx 30 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Enthalpies standard $\Delta_f H^0$ de formation à $25 \text{ }^\circ\text{C}$, en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$:

$H_2O_{(g)}$: $-2,5 \cdot 10^2$

$CO_{2(g)}$: $-4,0 \cdot 10^2$

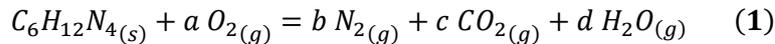
$C_6H_{12}N_{4(s)}$: $1,2 \cdot 10^2$

Capacité thermique molaire standard de tous les gaz : $C_{p,m}^0 = 40 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

1. La combustion des tablettes d'hexamine solide

Le but de cette sous-partie est de vérifier le pouvoir calorifique annoncé par le fournisseur. Les résultats numériques sont attendus avec un seul chiffre significatif.

15. Déterminer les nombres stœchiométriques a , b , c et d contenus dans l'équation de réaction (1) suivante de combustion de l'hexamine dans l'air :



16. Justifier que les enthalpies standard de formation à 25 °C de $N_{2(g)}$ et de $O_{2(g)}$ sont nulles.

17. Déterminer numériquement l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^0$ de la combustion de l'hexamine à 25 °C. On suppose cette grandeur indépendante de la température. La valeur trouvée est-elle cohérente avec une réaction de combustion ? Justifier.

Le pouvoir calorifique est le transfert thermique libéré lors de la combustion complète d'un kilogramme de combustible sous une pression de 1 bar et à une température de 25 °C.

18. En précisant entre autres les conditions d'application des lois utilisées, établir avec soin que le pouvoir calorifique de l'hexamine est :

$$PC = -\Delta_r H^0 / M_h$$

19. Estimer numériquement PC . La donnée fournisseur est-elle juste ?

20. Lorsque l'on monte en altitude, la pression diminue. On suppose que la réaction (1) reste un équilibre. Quel est l'effet de cette diminution de pression à température constante sur l'équilibre ? Le réchaud restera-t-il performant en altitude ?

On s'interroge maintenant sur l'affirmation lue sur le site du fournisseur : « Deux tablettes de 4 grammes permettent de faire bouillir 0,25 litre d'eau en 5 minutes ».

21. Quelle est la valeur numérique de l'énergie délivrée lors de la combustion des deux tablettes de combustible sous 1 bar et à 25 °C ? On utilisera le pouvoir calorifique fourni dans le **Document 6**.

22. On considère le système thermodynamique fermé constitué par un volume $V = 0,25$ L d'eau liquide. On le chauffe de manière monobare (pression extérieure constante égale à 1 bar) depuis une température de $T_1 = 20^\circ\text{C}$ jusqu'à une température $T_2 = 100^\circ\text{C}$ (température d'ébullition sous 1 bar). Déterminer, en justifiant soigneusement, l'expression littérale du transfert thermique reçu par l'eau lors de ce chauffage. Faire l'application numérique.

23. En conséquence, quel est le rendement espéré par le fournisseur lorsqu'il affirme « deux tablettes de 4 grammes permettent de faire bouillir 0,25 litre d'eau » ?

Une fois l'eau portée à ébullition, il faut encore apporter de l'énergie au système contenu dans la casserole pour maintenir l'ébullition.

24. Déterminer, en justifiant soigneusement, l'expression littérale du transfert thermique reçu par l'eau lors de la vaporisation monobare d'un volume $V' = 0,05$ L d'eau liquide déjà portée à $T_2 = 100^\circ\text{C}$. Faire l'application numérique. Commenter.

25. Dans le set de cuisson, on dispose d'un couvercle. Quel est son rôle ? Nommer précisément un phénomène physique en partie évité grâce au couvercle.

Toute l'étude précédente se base sur la donnée de l'enthalpie standard de la réaction (1). On se propose ici de remonter à sa valeur d'une manière différente. On prend une tablette de 4 g de combustible que l'on fait brûler sous pression constante dans un récipient calorifugé, donc selon la réaction (1) considérée comme totale à présent.

26. On suppose que la réaction est réalisée dans les proportions stœchiométriques en partant d'une quantité de matière initiale n_0 en hexamine et qu'elle se fait avec l'air contenu dans le récipient. Dresser un tableau d'avancement de la réaction à l'état initial, puis final. En déduire la valeur de l'avancement final.

27. On suit l'évolution de la température pendant la réaction. En partant d'une température initiale de 25°C, on trouve une température de flamme de 2025°C. En déduire la valeur de l'enthalpie standard de cette réaction. Comparer à la valeur calculée à la question 17.

2. Rendre l'eau potable

Plusieurs possibilités s'offrent au randonneur pour purifier l'eau de source trouvée en chemin, afin de pouvoir la consommer sans danger pour la santé. Il opte pour la solution d'alcool iodé.

Document 7 – Désinfection chimique de l'eau (d'après le site du Routard)

Les désinfectants chimiques du voyageur sont efficaces sur les bactéries. Parmi eux, certains éliminent également les virus et les parasites. Ils doivent toujours être utilisés avec une eau bien claire. Il est essentiel d'attendre un délai suffisant avant de la boire. [...]

Le plus efficace des désinfectants est l'iode, disponible en France en pharmacie sous forme d'alcool iodé à 2%. On l'utilise à dose de 5 à 10 gouttes par litre d'eau. Son utilisation doit rester ponctuelle car il présente des risques pour la thyroïde.

Document 8 – Alcool iodé à 1 % (d'après la fiche de l'Agence Nationale de Sécurité du médicament).

Définitions

a) Formule

Composants	quantité (g)	Fonction	Référentiel
Diode	1,00	Substance active	Ph. Eur.
Potassium (iodure de)	0,60	Solvant	Ph. Eur.
Ethanol à 96 % en volume	54,7	Excipient	Ph. Eur.
Eau purifiée q.s.p.	100,0	Excipient	Ph. Eur.

« q.s.p. » signifie que l'on ajoute la quantité d'eau purifiée nécessaire pour obtenir 100,0 g d'alcool iodé.

b) Teneur

Diode libre (I_2) : de 0,95 % en masse à 1,05 % en masse

Iodure de potassium (K^+ , I^-) : de 0,57 % en masse à 0,63 % en masse

Production (quantités du tableau)

Précaution : utilisez des récipients en verre pour la préparation.

Dissolvez l'iodure de potassium puis le diode dans 5 mL d'eau purifiée ; agitez et ajoutez la quantité d'éthanol indiquée. Complétez avec de l'eau purifiée.

Caractères

Aspect : liquide limpide brun foncé. Odeur d'éthanol et d'iode.

28. On souhaite préparer la solution d'alcool iodé en suivant le descriptif du **Document 8**. Préciser le matériel le plus adapté à utiliser pour :

- obtenir les 5 mL d'eau purifiée ;
- préparer les quantités adéquates de diode solide et d'iodure de potassium solide.

29. Expliquer pourquoi il y a un délai entre l'utilisation du désinfectant et le moment où l'on peut consommer l'eau. Ce délai s'allonge lorsque la température diminue. Sur quel paramètre la température joue-t-elle ?

On s'intéresse maintenant au dosage du diode.

Document 9 – Quelques caractéristiques du diode et autres composés

- L'iode sous forme moléculaire (le diode I_2 en solution aqueuse) est capable de cibler les bactéries grâce à son pouvoir oxydant, comme les autres halogènes.
- La solution d'empois d'amidon est bleue en présence de diode et incolore sinon.
- Masse molaire de l'iode : $M(I) = 127 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Autres composés :

Thiosulfate de sodium $Na_2S_2O_3$ ($S_2O_3^{2-}$, $2Na^+$ en solution aqueuse, où Na^+ est un ion spectateur)

- Potentiel standard d'oxydoréduction à 25°C :

$$E^0(I_2/I^-) = 0,62 \text{ V} \quad E^0(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}) = 0,08 \text{ V}$$

- Données supplémentaires :

$$\text{Constante de Faraday : } \mathcal{F} = 96500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1} \quad ; \quad \frac{RT}{\mathcal{F}} \times \ln(10) = 0,06 \quad ; \quad \exp\left(x \frac{\mathcal{F}}{RT}\right) = 10^{0,06x}$$

On souhaite réaliser le dosage de l'alcool iodé préparé en **Question 28** pour vérifier la quantité de diode présent dans cette solution désinfectante. Pour cela, on ajoute dans un erlenmeyer 10,0 mL (correspondant à $m = 10,0 \text{ g}$) de solution d'alcool iodé, avec quelques gouttes d'empois d'amidon, que l'on titre par le thiosulfate de sodium de concentration $C = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

30. On parle de « pouvoir oxydant » dans le **Document 9**. Justifier cette affirmation à l'aide de la notion de nombre d'oxydation. On s'intéressera au couple I_2/I^- .
31. Ecrire les deux demi-équations associées aux espèces participant au dosage.
32. Déterminer l'équation de la réaction du dosage (2). Justifier que cette réaction a bien lieu.
33. Donner l'expression de la constante d'équilibre associée à cette réaction, K_2^0 , en fonction des concentrations des constituants à l'équilibre.
34. Exprimer les potentiels associés à chaque demi-équation en utilisant la relation de Nernst.
35. Par la méthode de votre choix, exprimer puis calculer la constante d'équilibre K_2^0 , à 25°C de cette réaction sous la forme 10^a et commenter sa valeur.
- On s'intéresse maintenant à l'aspect expérimental du dosage et à l'exploitation des résultats.
36. Quelle verrerie doit-on utiliser pour introduire dans l'erlenmeyer les 10,0 mL d'alcool iodé ? Quelle verrerie est utilisée pour ajouter le thiosulfate goutte à goutte ?
37. Faire un schéma légendé du dosage.
38. Comment est repérée l'équivalence de ce dosage ?
39. On relève un volume à l'équivalence noté $V_{eq} = 8,20$ mL. Déterminer l'expression de la masse m' de diiode présente dans l'erlenmeyer en fonction de C , V_{eq} et $M(I)$ puis faire l'application numérique.
40. Vérifiez que la teneur en diiode est bien comprise entre 0,95 et 1,05 % en masse, comme indiqué dans le **Document 8**.

CHANGER DE COPIE

III. La grêle

Les orages en montage sont courants, et il arrive régulièrement qu'ils soient accompagnés de chute de grêle. La grêle est constituée de blocs de glace, appelés grêlons, de formes variées et de tailles pouvant aller de quelques millimètres à plusieurs centimètres. Ces blocs se forment au sein des nuages, à des altitudes comprises entre 1 et 10 km. Leur vitesse de chute au sol avoisine les 100 km/h pour les grêlons de 4 à 8 centimètres de diamètre. Cette partie s'intéresse à la modélisation de leur chute.

1. Chute sans frottement

On considère un grêlon de masse m , qui chute dans le champ de pesanteur \vec{g} . On choisit un axe z orienté vers le bas (sol), $z = 0$ étant la position initiale du grêlon lorsqu'il est lâché dans le nuage. La vitesse initiale est nulle. On note \vec{e}_z un vecteur unitaire orienté vers le bas. On néglige tout frottement.

41. Donner en l'expliquant l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur, E_{pp} , du grêlon (on choisira une énergie potentielle nulle en $z = 0$).
42. Par une méthode énergétique, établir l'expression de la vitesse, v , du grêlon en fonction de z .
43. Estimer la valeur de cette vitesse après une chute de 1 km. Est-ce en accord avec ce qui est rapporté ci-dessus ? Quelle hypothèse n'est pas raisonnable ?

2. Chute avec frottements quadratiques

On conserve les mêmes notations que précédemment, mais on rend cette fois compte des frottements entre le grêlon et l'air. On note $\vec{v} = v(t)\vec{e}_z$ la vitesse du grêlon. La force de frottement de l'air sur le grêlon peut s'écrire :

$$\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{e}_z$$

Pour les vitesses atteintes par les grêlons, des études en soufflerie sur des sphères montrent que le coefficient α est donné par :

$$\alpha = \frac{1}{2} \rho_{air} \pi R^2 C$$

Avec ρ_{air} la masse volumique de l'air, R le rayon du grêlon et $C \approx 0,5$.

44. Montrer que l'équation différentielle portant sur la vitesse $v(t)$ du grêlon peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} v^2 = g$$

45. Sans résoudre cette équation, montrer qu'il existe une solution où la vitesse est constante. On note v_{lim} cette constante. On donnera son expression en fonction de α , m et g .

On admet que, quelle que soient les conditions initiales, la vitesse du grêlon tend vers la vitesse v_{lim} , appelée vitesse limite.

On étudie ensuite le mouvement du grêlon à l'aide d'une résolution numérique. Les hypothèses et notations sont toujours les mêmes. On utilise pour cela la méthode d'Euler explicite, dans un programme Python présenté dans le **Document 10**.

46. Expliquer et compléter la case 1 de l'algorithme (ligne 16).
47. Expliquer et compléter la case 2 de l'algorithme (ligne 17).

Les graphiques présentés dans le **Document 11** sont ceux de la position $z(t)$ et de la vitesse $v(t)$ obtenue par l'algorithme.

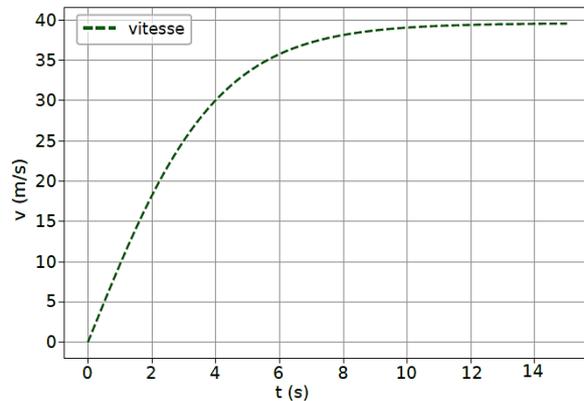
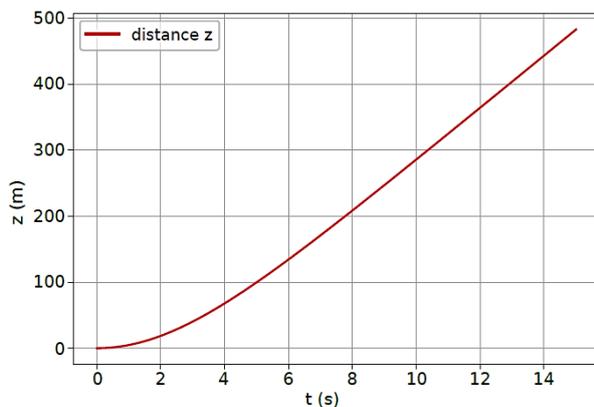
48. La vitesse limite obtenue est-elle compatible avec les observations ? Déterminer la distance z au bout de laquelle le grêlon atteint 75 % de sa vitesse limite.

Document 10 - Programme Python (extrait)

Les valeurs de m et α sont ici données en unités S.I. et sont valables pour un grêlon de diamètre 8 cm.

```
1 g = 9.8
2 alpha = 1.5e-3
3 m = 0.24
4 dt = 0.02 # pas d'intégration en secondes
5 fin = 15 # durée de la simulation en secondes
6 nb_iterations = int(fin/dt)+1
7
8 # Initialisation
9 t = [0 for k in range(nb_iterations)]
10 z = [0 for k in range(nb_iterations)]
11 v = [0 for k in range(nb_iterations)]
12
13 # Résolution par la méthode d'Euler explicite
14 for i in range(1,nb_iterations-1):
15     t[i+1] = t[i]+dt
16     z[i+1] = [case 1 à compléter]
17     v[i+1] = [case 2 à compléter]
```

Document 11 : position $z(t)$ et vitesse $v(t)$ au cours de la chute d'un grêlon de 8 cm, courbes obtenues en traçant les résultats de l'algorithme d'Euler



CHANGER DE COPIE

IV. Effets magnétiques de la foudre (effet de tension induite)

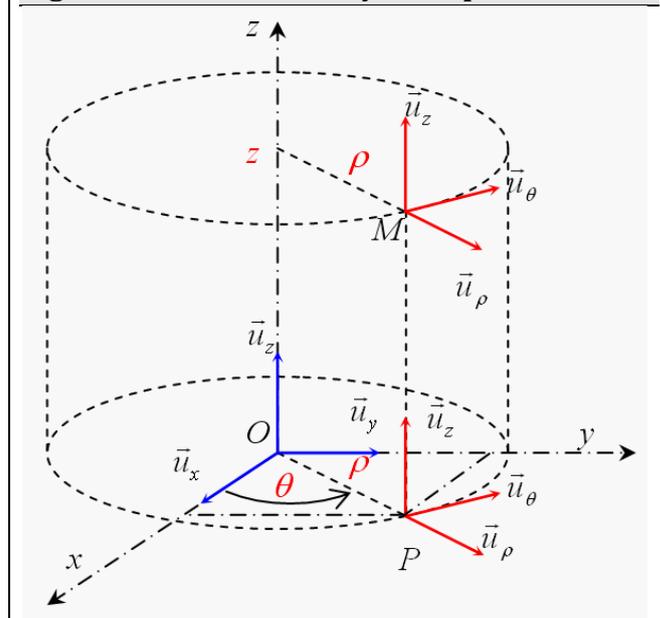
La foudre se manifeste particulièrement en montagne, milieu propice à la formation de nuages d'orage.

La foudre peut causer des dégâts matériels de plusieurs façons. L'une d'elles est par un effet de tension induite dans les circuits électriques avoisinants. Ces circuits peuvent être l'installation électrique d'un refuge de montagne, ou les accessoires électroniques du randonneur.

Pour étudier ceci, on modélise d'abord le coup de foudre comme un fil rectiligne infini, d'axe vertical ascendant, parcouru par un courant I constant et dirigé dans le sens des z croissants. On se place dans le vide.

On utilise un système de coordonnées cylindriques d'axe z (**Figure 2**). La perméabilité magnétique du vide est $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

Figure 1 - Coordonnées cylindriques



49. En utilisant les symétries et invariances du problème, déterminer la direction du champ magnétique produit par le fil, et les variables dont il dépend.

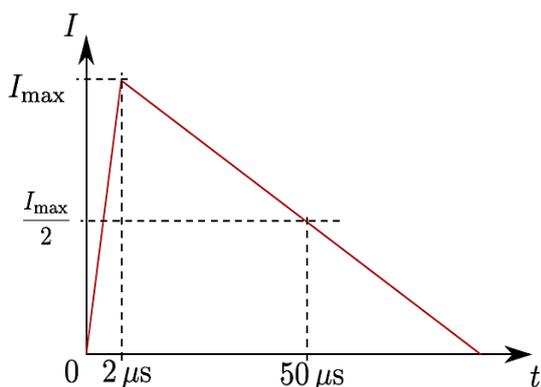
50. En s'appuyant sur un schéma, déterminer l'expression du champ magnétique \vec{B} produit à l'extérieur du fil.

Le courant I n'est en réalité pas constant (**Document 12a**). On admet toutefois que l'expression précédente du champ magnétique reste valable à chaque instant en remplaçant I par $I(t)$.

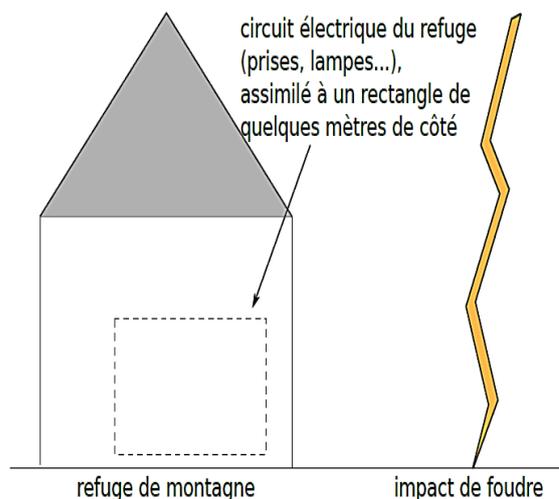
51. [Résolution de problème] En utilisant notamment les deux schémas (**Document 12**) ci-dessous, et en proposant des ordres de grandeur raisonnables pour les dimensions considérées, estimer la valeur maximale de la force électromotrice (ou tension) induite dans le circuit électrique d'un refuge de montagne, si le coup de foudre tombe à une distance $d = 10 \text{ m}$ de celui-ci. Commenter le résultat.

Indication : on commencera par identifier les effets et lois physiques en jeu. On effectuera des approximations pour rendre les calculs simples.

Document 12a - Profil standardisé de l'intensité $I(t)$ délivrée par un coup de foudre, utilisé pour les études de risques dans les installations électriques. On pourra prendre $I_{\max} = 50 \text{ kA}$.



Document 12b - Vue schématique de la situation



V. Station de transfert d'énergie par pompage

La montagne est un espace largement aménagé. Nous étudions ici un dispositif de stockage d'énergie appelé station de transfert d'énergie par pompage (STEP) (**Document 14**). Il s'agit de deux retenues d'eau situées à des altitudes différentes, entre lesquelles est construite une conduite. 2 modes de fonctionnement sont possibles :

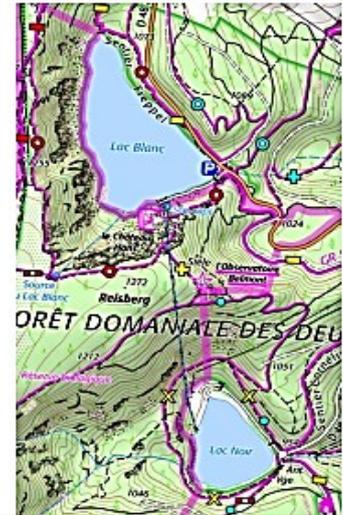
- (1) passage de l'eau du réservoir haut au réservoir bas, ce qui permet, via une turbine et un alternateur, de produire de l'énergie électrique ;
- (2) passage de l'eau du réservoir bas au réservoir haut, à l'aide d'une pompe alimentée par le réseau électrique.

L'intérêt est de disposer d'un moyen de stockage de l'énergie : le mode (1) est activé lors des pics de consommation pour produire une puissance électrique, alors que le mode (2) permet de profiter de la puissance électrique produite par des sources intermittentes (éoliennes...) qui sinon serait gâchée lors d'heures creuses, en l'exploitant pour faire remonter l'eau.

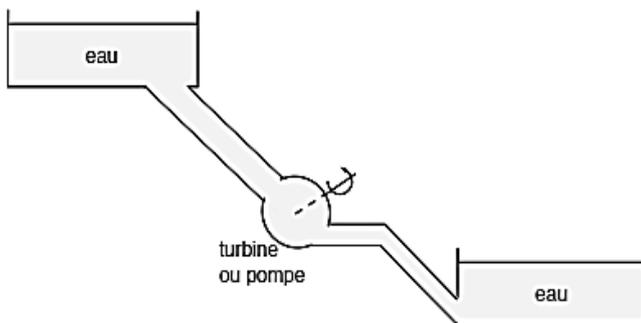
Nous étudions la STEP du lac Noir située dans les Vosges (**Document 13**). Première centrale de ce type en France, elle n'est aujourd'hui plus en fonctionnement. Une conduite relie le lac Blanc (altitude 1050 m) au lac Noir (altitude 950 m).

Les altitudes seront repérées par rapport à un axe z ascendant. On note P_{1000} la pression atmosphérique supposée ici uniforme, que l'on soit au lac Blanc ou au lac Noir, $\mu = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique de l'eau et $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ la pesanteur supposée constante et uniforme.

Document 13 – Situation réelle sur une carte topographique IGN



Document 14 – Schéma de principe de la station de pompage, avec les deux lacs



Document 15 – Mode « direct » de la station



52. Donner l'expression de la relation de Bernoulli entre un point E et un point S d'un écoulement, sans élément actif et sans pertes de charge, ainsi que les hypothèses sous lesquelles elle s'applique.

La station dispose d'un mode "direct", utilisé en cas de trop plein : l'eau est acheminée sans passer par une turbine ou une pompe. Elle arrive au lac inférieur à l'air libre (**Document 15**).

53. Déterminer l'expression, puis une valeur approchée, de sa vitesse en sortie, v_S .

54. Le diamètre de la conduite de sortie est d'environ $D = 2 \text{ m}$. Le volume du lac haut est d'environ $V_{lac} = 3 \times 10^6 \text{ m}^3$. Quelle durée est approximativement nécessaire pour le vider ?

On considère maintenant la station fonctionnant en mode (1) : la turbine extrait au fluide une puissance $\Phi > 0$. La conduite est immergée dans la retenue haute et dans la retenue basse (cf **Document 14**).

On prendra $\pi \approx 3$.

55. Établir l'expression de cette puissance en fonction des données du problème et du débit volumique D_V dans la conduite. On pourra négliger les vitesses à la surface de chaque lac.

56. EDF annonce un débit nominal de $D_{V,\text{nom}} = 60 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Faire alors l'application numérique approchée pour Φ .
57. EDF indique que la puissance réelle est de $\Phi_{\text{reel}} = 55 \text{ MW}$: proposer une explication quant à la différence avec la valeur que nous venons d'obtenir (différence qui n'est pas expliquée par l'approximation sur g).
58. Estimer alors la puissance réelle Φ_{pompe} nécessaire lors de la phase de pompage (pour un débit $D_{V,\text{nom}}$).

FIN DU SUJET