

Devoir surveillé 4 – Niveau CCINP

L'emploi des calculatrices personnelles est interdit.

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions et d'y répondre dans l'ordre sur sa copie.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

ATTENTION : - La rédaction doit être faite à l'encre noire ou bleue. Les couleurs doivent être réservées à l'encadrement des résultats et/ou les schémas.
- Les encres vertes et violettes sont interdites.
- Sont interdits également : les stylos plumes, les correcteurs type « Typex » ou « blanco », les stylos à friction.

Données pour l'ensemble des problèmesConstantes physiques :

$$\text{Permittivité diélectrique du vide : } \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\text{Perméabilité diélectrique du vide : } \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

Théorème de Stokes :

Soit une surface ouverte S s'appuyant sur un contour fermé C dans une région de l'espace V où est défini un champ de vecteur \vec{a} , alors :

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\vec{S}$$

Théorème d'Ostrogradsky :

Soit une surface fermée S limitant un volume fini V à l'intérieur duquel est défini un champ de vecteur \vec{a} . Si les dérivées partielles de \vec{a} sont bornées dans V alors :

$$\oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\text{div}\vec{a}) dV$$

Identité vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \vec{\Delta}(\vec{a})$$

Formules trigonométriques :

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Détecteur de métaux

Les détecteurs de métaux sont des instruments électroniques capables d'indiquer la présence de masses métalliques de nature et de taille différentes (FIGURE 1). Les détecteurs fixes sont utilisés dans les aéroports, dans l'industrie agro-alimentaire ou pharmaceutique, sur les réseaux routiers, etc. Les détecteurs mobiles peuvent servir à localiser et suivre le cheminement de canalisations enterrées ou de fils électriques, à aider aux fouilles archéologiques, à repérer des engins dangereux, etc.

Les détecteurs de métaux fonctionnent selon des principes variés dépendant de l'utilisation souhaitée. Ici, nous étudierons dans un premier temps un capteur de déplacement, les câbles nécessaires pour faire transiter l'information, mais aussi la possibilité de transmettre l'information sans fil.

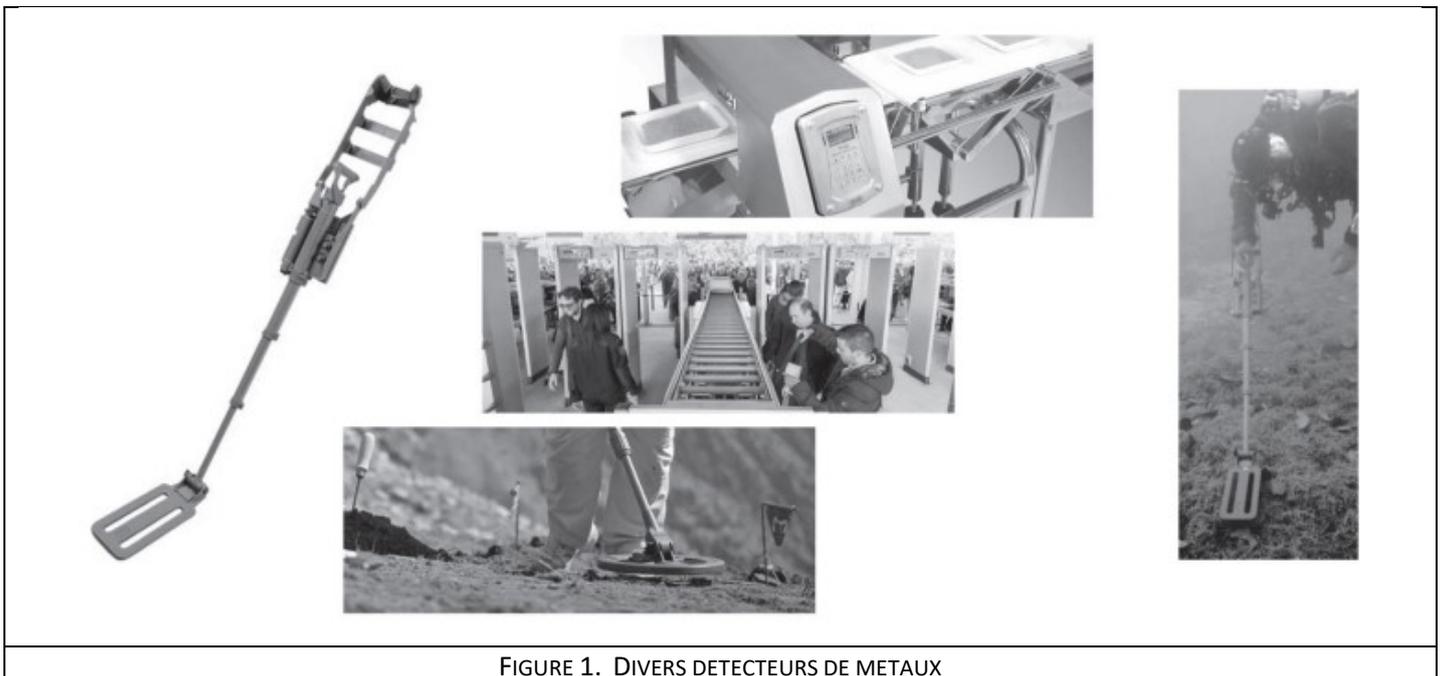


FIGURE 1. DIVERS DETECTEURS DE METAUX

I) Capteur de déplacement

Le capteur utilise une bobine d'auto-induction. On s'intéresse dans un premier temps au champ magnétique créé par un solénoïde dans l'air, puis à partir de là au capteur lui-même, obtenu en insérant une partie mobile à l'intérieur du solénoïde. Les données utiles se trouvent en fin de partie I.

I.1) Etude du solénoïde

On considère un solénoïde de longueur l_0 et de rayon R recouvert de N spires jointives bobinées sur un cylindre rempli d'air, dans lesquelles circule un courant électrique d'intensité I (FIGURE 2). On considèrera que les propriétés magnétiques de l'air sont celles du vide. Tous les calculs de champ magnétique seront menés dans le cas du solénoïde infini.

1) Donner l'énoncé du théorème d'Ampère. De quelle équation de Maxwell découle-t-il ? Donner son expression. Dans quelles conditions doit-on travailler pour que le théorème d'Ampère soit valable ? On montrera alors comment passer de l'équation locale à l'équation intégrale.

2) Montrer que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde peut se mettre sous la forme :

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_z$$

On fera pour cela une étude complète des symétries et invariances du problème.

3) En supposant le champ magnétique nul à l'extérieur du solénoïde, montrer que la norme du champ magnétique en tout point intérieur du solénoïde peut se mettre sous la forme :

$$B = \mu_0 \left(\frac{N}{l_0}\right) I$$

4) Donner l'équation de Maxwell en la nommant se rapportant au phénomène d'induction. Quelle loi en déduit-on ?

5) Exprimer alors le flux propre, ϕ_{propre} , du champ magnétique généré par le solénoïde.

6) Montrer que l'expression littérale du coefficient d'auto-inductance ou inductance propre L_0 du solénoïde peut se mettre sous la forme :

$$L_0 = N\mu_0 \left(\frac{N}{l_0}\right) \pi R^2$$

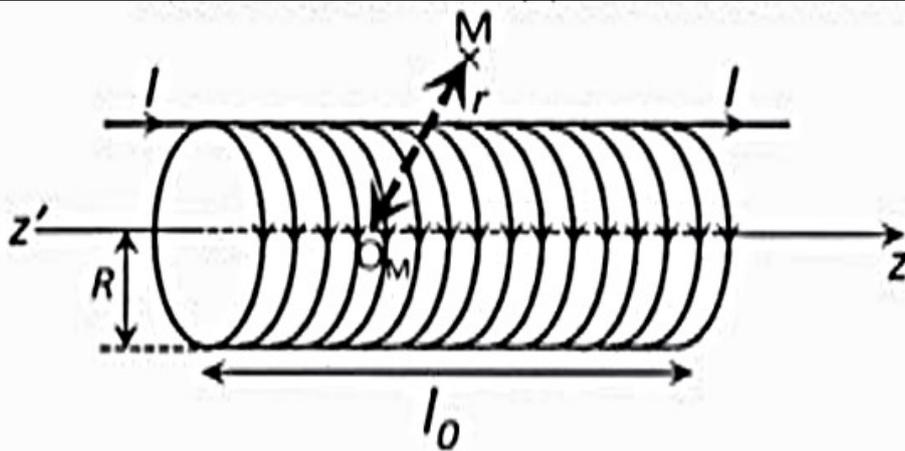


FIGURE 2. SOLENOÏDE DE LONGUEUR l_0 CONSTITUE DE N SPIRES JOINTIVES BOBINÉES SUR UN CYLINDRE REMPLI D'AIR, DANS LESQUELLES CIRCULE UN COURANT ÉLECTRIQUE D'INTENSITÉ I

I.2) Etude du capteur

Le capteur étudié est représenté sur la FIGURE 3. Une partie mobile de longueur l_0 , appelée noyau, peut se déplacer en translation à l'intérieur du solénoïde initialement rempli d'air. Pour la suite de l'étude, nous admettrons les résultats suivants :

- L'insertion d'un noyau à l'intérieur d'un solénoïde conduit à une modification de son coefficient d'auto-inductance : l'inductance en présence du noyau est le produit de l'inductance dans l'air par un facteur multiplicatif δ .
- Le coefficient d'auto-inductance du capteur peut être évalué comme celui résultant de la mise en série de deux solénoïdes :
 - Le premier, de longueur x , est rempli d'air,
 - Le deuxième, de longueur $l_0 - x$, contient le noyau.

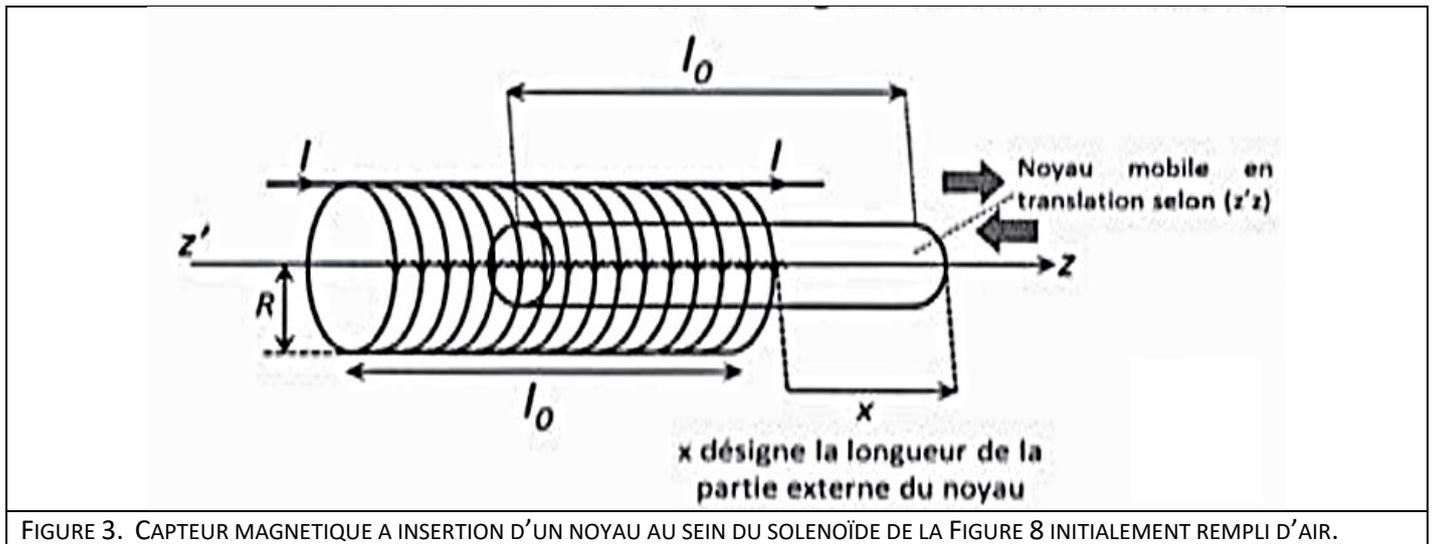


FIGURE 3. CAPTEUR MAGNETIQUE A INSERTION D'UN NOYAU AU SEIN DU SOLENOÏDE DE LA FIGURE 8 INITIALEMENT REMPLI D'AIR.

- 7) Déterminer en fonction de N , l_0 et x , le nombre N_1 de spires de la partie gauche du solénoïde sans noyau et celui (N_2) de la partie droite avec le noyau interne.
- 8) En déduire l'inductance propre de chaque partie en fonction de δ , L_0 , N , N_1 et N_2 puis l'inductance $L(x)$ en fonction de δ , L_0 , l_0 et x .

I.3) Conditionnement des signaux par oscillateur

L'information de déplacement en provenance des capteurs inductifs peut être extraite à partir d'un oscillateur électronique (FIGURE 4). L'information de déplacement, qui induit une modification de l'inductance L est source d'une modification de la fréquence de résonance de l'oscillateur, aisément détectable, à l'aide d'un fréquencemètre. L'ALI utilisé, que l'on supposera parfait, est alimenté au moyen d'une alimentation symétrique $\pm V_{cc} = \pm 12V$ et sa tension de saturation est $V_{sat} = 11V$.

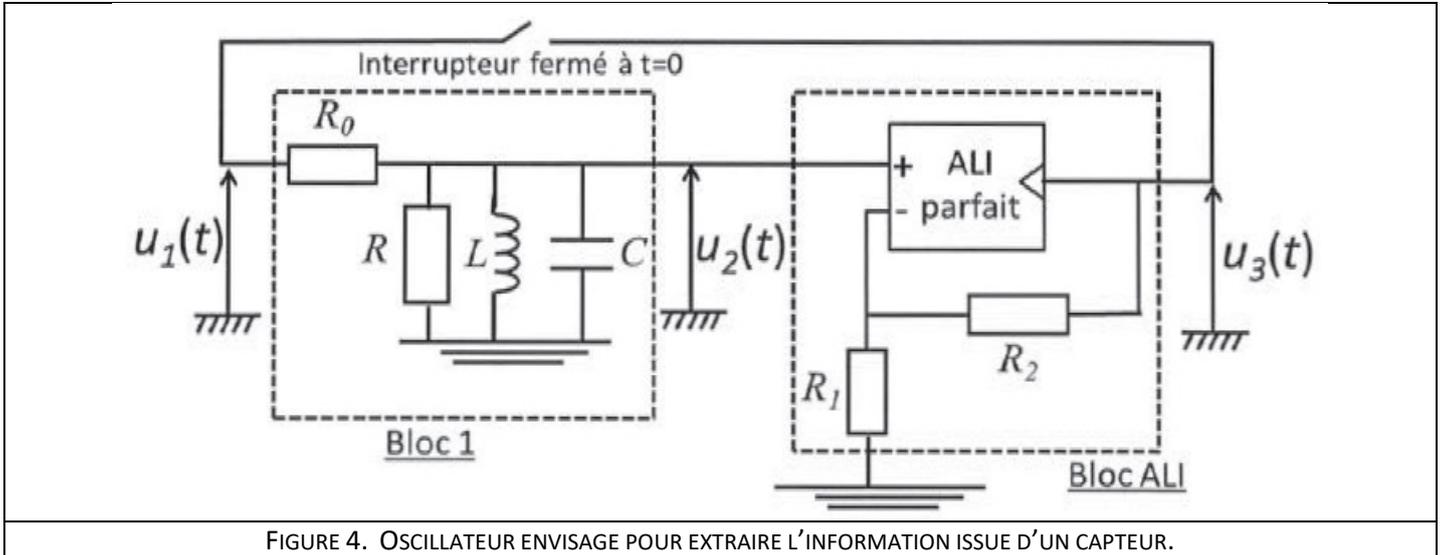


FIGURE 4. OSCILLATEUR ENVISAGE POUR EXTRAIRE L'INFORMATION ISSUE D'UN CAPTEUR.

A. Etude du bloc 1

Le bloc 1 réalise un filtre de fonction de transfert complexe :

$$\underline{H} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{A_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \text{ avec } A_0 = 0,1, Q = 25, x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

9) Préciser la nature de ce filtre. Exprimer \underline{H} en fonction de la valeur des composants du bloc 1 et de ω .

Par identification, retrouver les expressions suivantes de A_0 , ω_0 et Q :

$$A_0 = \frac{R}{R+R_0}, Q = \frac{RR_0}{R+R_0} \sqrt{\frac{C}{L}} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

B. Etude du bloc ALI

10) Montrer que l'expression littérale de la fonction de transfert complexe du bloc ALI se met sous la forme :

$$\underline{G} = \frac{u_3}{u_2} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

On pose $K = |\underline{G}|$.

C. Système bouclé

On ferme l'interrupteur, réalisant ainsi le système bouclé.

11) Quel type d'oscillateur réalise-t-on ?

12) Dédire des questions précédentes l'équation différentielle suivante vérifiée par u_3 :

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} (1 - KA_0) \frac{du_3}{dt} + \omega_0^2 u_3 = 0$$

13) A partir de cette équation, trouver une condition liant A_0 et K pour que s'établissent des oscillations quasi sinusoïdales. Déterminer alors la fréquence f_0 de ces oscillations.

D. Simulation informatique

Afin de résoudre l'équation différentielle de la question 12, on utilise le programme Python du document 1.

14) Expliquer la méthode de résolution, en particulier les lignes 26 et 27.

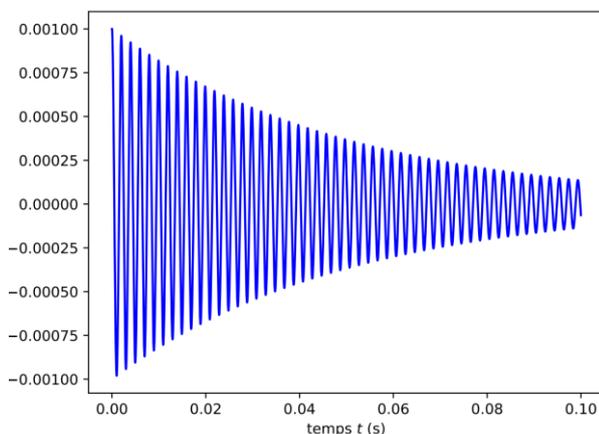
15) Commenter l'allure des courbes obtenues pour différentes valeurs de R_2 (allure générale, fréquence, amplitude).

16) Que représentent les 2 lignes noires sur la figure de droite ? Modifier l'allure finale de la tension u_3 dans ce cas.

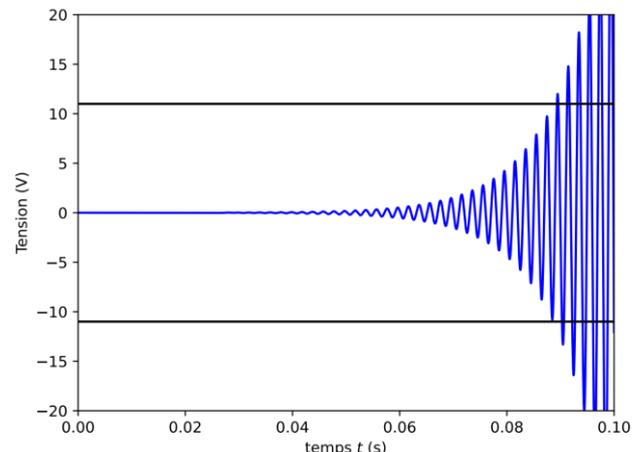
```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 ##### Paramétrage des grandeurs électriques
5 R = 10000 # En Ohm
6 R0 = 10000 # En Ohm
7 R1 = 10 # En Ohm
8 R2 = 5 # ou 30 Ohm
9 K=1+R2/R1
10 C = 10**(-6) # En Farad
11 L = 10**(-1) # En Henry
12 omega_0 = 1/(L*C)**0.5
13 Q = R*R0/(R+R0)*(C/L)**0.5
14 A0=R/(R+R0)
15 V_sat = 11 # En Volt
16
17 ## Paramétrage et initialisation de la simulation
18 u3 = np.array([u3_0] + [0 for k in range(N - 1)])
19 dotu3 = np.array([dotu3_0] + [0 for k in range(N - 1)])
20 V_sat_pos = np.array([V_sat for i in range(N)])
21 V_sat_neg = np.array([- V_sat for i in range(N)])
22
23 ## Génération de la tension u3
24 for k in range(0, N - 1):
25     u3[k + 1] = u3[k] + dotu3[k] * Delta_t
26     dotu3[k + 1] = dotu3[k] * (1 - omega_0*Delta_t*(1-K*A0)/Q) - (omega_0**2) * Delta_t * u3[k]
27
28 ## Affichage des tensions
29 plt.plot(t,u3,'b',label='V1')
30 plt.plot(t,V_sat_pos,'k')
31 plt.plot(t,V_sat_neg,'k')
32 plt.xlabel("temps $t$ (s)")
33 plt.ylabel("Tension (V)")
34 plt.axis([t[0], t[N - 1],-20, 20])
35 plt.show()

```



$R_2 = 5 \Omega$



$R_2 = 30 \Omega$

Document 1. Programme Python et courbes obtenues

I.4) Détection d'un déplacement

On utilise le dispositif complet pour suivre les déplacements X du noyau mobile du capteur précédent dont l'inductance peut être donnée par la loi $L = L_0 \left(1 - \frac{X}{e}\right)$, avec $L_0 = 0,1 \text{ mH}$ et $e = 1 \text{ }\mu\text{m}$. Ce capteur forme la bobine du bloc 1 de la FIGURE 4.

Les composants choisis sont tels que le montage oscille à une fréquence f_{osc} liée à l'inductance L par la relation : $f_{osc} = \frac{D}{\sqrt{L}}$ avec $D = 1$. A la position de référence du capteur ($X = 0$), la fréquence d'oscillation est f_{or} .

17) Montrer que, pour un petit déplacement X ($\frac{X}{e} \ll 1$), la fréquence d'oscillation peut se mettre sous la forme $f_{osc} \approx aX + b$. Expliciter a et b en fonction des données.

18) On note $\Delta f = f_{osc} - f_{or}$ la variation de fréquence liée à un déplacement. La plus petite variation détectable est $\Delta f_{min} = 100 \text{ Hz}$. Quel est le plus petit déplacement détectable ?

II) Câble coaxial

Les câbles coaxiaux sont des câbles très utilisés dans le domaine de l'électronique.

Un câble coaxial, comme schématisé en FIGURE 5, est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur l , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1 , appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon R_2 . L'espace inter-conducteur comporte un isolant, ici assimilé au vide.

On pose : $R_1 = 0,25\text{mm}$, $R_2 = 1,25\text{mm}$ et $l = 100\text{m}$.

Vu que $l \gg R_2$, on négligera les effets de bord.

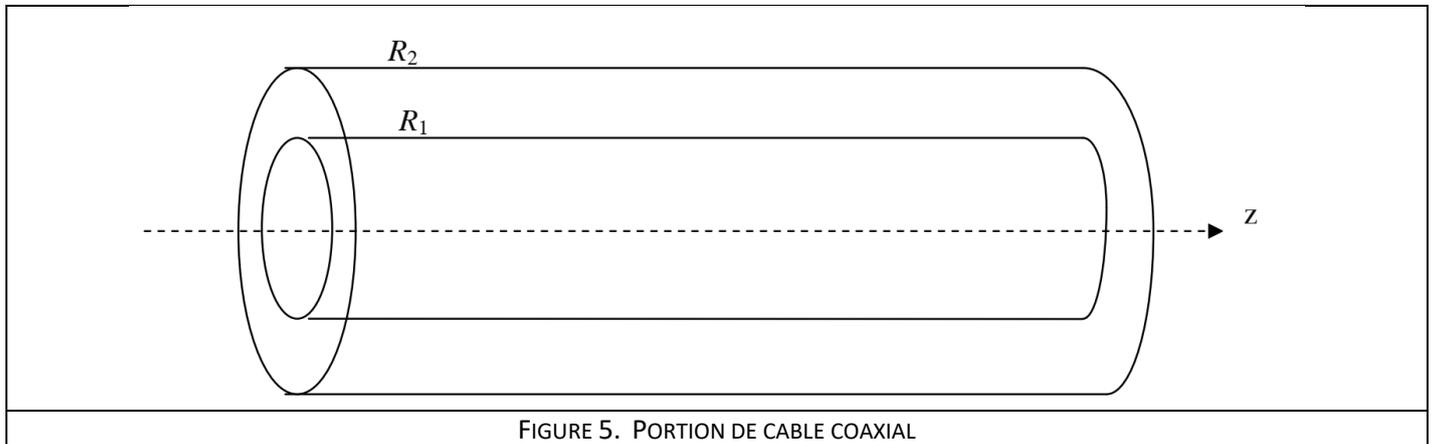


FIGURE 5. PORTION DE CÂBLE COAXIAL

On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base en coordonnées cylindriques.

II.1) Capacité linéique

On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives Q et $-Q$. Elles sont uniformément réparties en surface.

19) Justifier que, en tout point M de l'espace, le champ électrique \vec{E} peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

20) De quelle équation de Maxwell découle le théorème de Gauss ? Énoncer le théorème et l'équation de Maxwell. On montrera comment passer de l'équation locale à l'équation intégrale.

21) En utilisant le théorème de Gauss sur une surface Σ que l'on précisera, exprimer $E(r)$ en fonction de l , r , Q et ϵ_0 dans les trois domaines suivants : $r < R_1$; $R_1 < r < R_2$; $r > R_2$.

22) Les conducteurs (1) et (2) sont portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2 constants. Par un calcul de circulation, montrer que :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

23) On appelle C la capacité du câble. Exprimer C en fonction de l , R_1 , R_2 et ϵ_0 .

Montrer alors que la capacité linéique C_l du câble coaxial peut se mettre sous la forme :

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

II.2) Inductance linéique

On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller I_0 , dirigé selon \vec{u}_z , le conducteur extérieur assure le transport du courant retour $-I_0$. Les répartitions de ces courants sont superficielles et uniformes sur chaque conducteur.

24) Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique \vec{B} . Justifier que :

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$$

25) Par application du théorème d'Ampère sur un parcours Γ que l'on précisera, exprimer $B(r)$ en fonction de I_0 , r et μ_0 dans les trois domaines suivants : $r < R_1$; $R_1 < r < R_2$; $r > R_2$.

26) Exprimer l'inductance L du câble de longueur l en fonction de μ_0 , R_1 , R_2 et l .

En déduire que l'inductance linéique L_l du câble coaxial peut s'écrire sous la forme :

$$L_l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

II.3) Conclusion et bilan énergétique

Les câbles coaxiaux sont conçus pour transmettre des signaux tout en assurant une protection contre les perturbations extérieures.

27) D'après les calculs menés précédemment, expliquer en quoi le câble coaxial permet de protéger le signal transmis des perturbations extérieures.

28) Exprimer le champ électrique \vec{E} en fonction de $V_1 - V_2$ pour $R_1 < r < R_2$.

En déduire que le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ peut se mettre sous la forme :

$$\vec{\Pi} = \frac{(V_1 - V_2)I}{2\pi r^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{u}_z$$

29) Trouver alors l'expression de la puissance rayonnée P_{ray} à travers une section droite du câble coaxial. Commenter.

III) Communication sans fil

Plutôt que d'utiliser des câbles pour transmettre l'information, on a tendance à l'heure actuelle à privilégier les communications sans fils.

Dans la suite, on utilisera le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

III.1) Propagation d'une onde électromagnétique

On considère une source émettant un rayonnement monochromatique, de pulsation ω . On note \vec{E} le champ électrique et \vec{B} le champ magnétique associé. Le milieu de propagation est l'air et sera assimilé à du vide dont la permittivité diélectrique est notée ϵ_0 et la perméabilité magnétique μ_0 .

30) Enoncer les équations de Maxwell décrivant la situation étudiée.

31) Montrer que l'équation de propagation du champ électrique \vec{E} , en posant $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ est :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On étudie la propagation de l'onde électromagnétique émise par cette source. On suppose que l'on peut considérer le champ électrique \vec{E} comme une onde localement plane dont l'amplitude E_0 est supposée constante et se propageant à la vitesse $v > 0$. Dans ces conditions, on décrit le champ électrique par :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \vec{u}_z$$

32) Préciser la direction de propagation et de polarisation de cette onde. Comment pourrait-on vérifier sa polarisation en pratique ?

33) Vérifier que $\vec{E}(x, t)$ est effectivement bien solution de l'équation de propagation. En déduire alors la relation entre v et c .

34) Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(x, t)$ associé.

35) Rappeler l'expression du vecteur de Poynting \vec{R} ainsi que son unité.

Montrer que la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$ du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

36) A chaque instant, on suppose que la source émet une puissance P de manière isotrope. Donner l'expression de $\|\langle \vec{R} \rangle\|$ mesurée à la distance d de la source en fonction de P .

37) Montrer alors que la valeur de E_0 en $V \cdot m^{-1}$ est donnée par la formule :

$$E_0(d) = \frac{\sqrt{60P}}{d}$$

III.2) Réception de l'onde électromagnétique

On s'intéresse dans cette partie aux problèmes de réception lorsque l'on se trouve à proximité d'une structure métallique. L'onde électromagnétique considérée sera la même qu'en partie 1 mais à une fréquence de $f = 2,4 \text{ GHz}$ soit dans le domaine des micro-ondes. Pour modéliser la situation précédente, on supposera la structure constituée de plans métalliques parfaits.

38) Qu'appelle-t-on un conducteur parfait ? Quelles hypothèses peut-on faire en son sein ?

A. Réflexion sur un conducteur parfait

L'onde est émise par l'antenne du téléphone dans le demi-espace $x < 0$. En $x = 0$, elle arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur et donne naissance à une onde réfléchie (FIGURE 6) se propageant dans la direction (Ox) dans le sens des x décroissants :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cos(\omega t + kx)$$

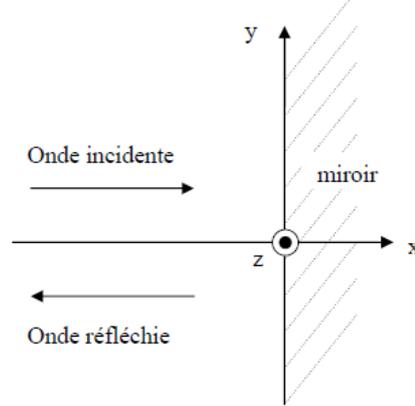


FIGURE 6 : REFLEXION DE L'ONDE SUR LE CONDUCTEUR PARFAIT

La relation de passage du champ électrique à l'interface entre deux milieux est donnée par :

$$\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

où l'on note $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ la normale en un point M de l'interface, orientée du milieu 1 vers le milieu 2, M_1 et M_2 deux points dans chaque demi-espace au voisinage du point M , $\sigma(M)$ la densité surfacique de charge au point M .

39) Réécrire cette relation sur le plan d'équation $x = 0$ qui limite l'espace entre le vide et le miroir métallique.

Montrer en utilisant cette relation que le champ électrique réfléchi est polarisé suivant l'axe (Oz) et établir l'expression du vecteur \vec{E}_{0r} en fonction de E_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

40) Déterminer l'expression en fonction du temps du champ magnétique réfléchi \vec{B}_r . On exprimera \vec{B}_r en fonction de E_0 , ω , k , t , x , c et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

41) Déterminer le champ électrique \vec{E}_{total} et le champ magnétique \vec{B}_{total} du champ électromagnétique résultant de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace $x < 0$. Caractériser l'onde résultante.

42) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting \vec{I} de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne $\langle \vec{I} \rangle$ au cours d'une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Commenter.

43) Déterminer la position x_n des nœuds du champ électrique \vec{E}_{total} . Expliquer les problèmes de réception qui peuvent se poser.

B. Réflexion sur deux conducteurs parfaits

On suppose dans cette partie d'un deuxième plan métallique se trouve en $x = -L$.

44) Que peut-on dire pour le champ électrique \vec{E}_{total} en $x = -L$?

45) Montrer que cela entraîne :

$$\vec{E}_{total} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \vec{e}_z \quad n \in \mathbb{N}^*$$

46) Quel problème va alors se poser si $f \neq \frac{nc}{2L}$?

IV) Utiliser un capteur MEMS pour la surveillance des vibrations

La surveillance des vibrations (VM) existe depuis longtemps et est utilisée pour surveiller l'état d'une machine, d'un équipement ou d'une structure. Les données de vibrations recueillies par des capteurs dédiés pendant le fonctionnement d'une machine sont surveillées et analysées en temps réel.

L'objectif principal de la surveillance des vibrations est de réduire le risque de dommages irréparables et les temps d'arrêt potentiels, ce qui permet de contrôler et de réduire les coûts opérationnels.

Le capteur de vibrations est un composant clé dans une application de surveillance des vibrations. Les derniers capteurs de vibrations sont basés sur la technologie MEMS, utilisant le même concept que la détection d'accélération dans un accéléromètre. La principale différence réside dans la bande passante du capteur. Un accéléromètre MEMS a une bande passante typique de 3 kHz, mais un capteur de vibrations est capable de détecter les vibrations à une bande passante beaucoup plus élevée.

<https://www.digikey.fr/fr/articles/using-a-mems-sensor-for-vibration-monitoring>, 2022-03-02

IV.1) Capteur électrostatique

Concrètement, le capteur est réalisé à la surface d'une tranche de silicium (« wafer »). Après réalisation, on observe par microscopie électronique que la surface du composant présente des micro-structures en silicium telles des micro-poutres, des microlamelles, etc. Les dimensions typiques des éléments de ces structures sont de 1 à 100 µm.

Les photographies en FIGURE 7 montrent la « masse sismique » (la partie centrale ajourée ou « beam ») dont on étudie le mouvement et qui subit globalement les effets de l'accélération à mesurer. Celle-ci est reliée « au bâti » par des micro-poutres d'ancrage (« anchor »).

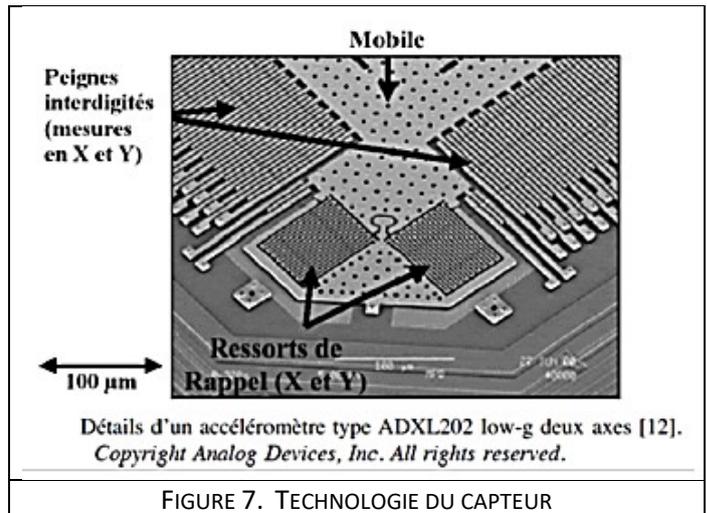


FIGURE 7. TECHNOLOGIE DU CAPTEUR

On s'intéresse dans cette partie au système de détection du déplacement X de la masse mobile de l'accéléromètre pour cela on utilise un condensateur à écartement variable.

Une approche simple, dont le principe est représenté sur la FIGURE 8, consiste à mesurer la capacité d'un condensateur dont une électrode, liée à la masse mobile, fait face à une électrode fixe liée au boîtier de l'accéléromètre. Le déplacement de la masse mobile (lié à la valeur de l'accélération de la pesanteur) modifie la distance entre les deux électrodes et par voie de conséquence la capacité du condensateur.

On applique une différence de potentiel $U = V_a$ entre les deux électrodes, l'électrode fixe étant portée au potentiel V_a et l'électrode mobile étant reliée à la masse. Les deux électrodes sont assimilées à deux plans infinis parallèles séparés d'une distance $e + X$. Les charges qui apparaissent sur chacune des électrodes se répartissent uniformément en surface. On note $+\sigma$ la charge surfacique portée par l'électrode fixe liée au boîtier.

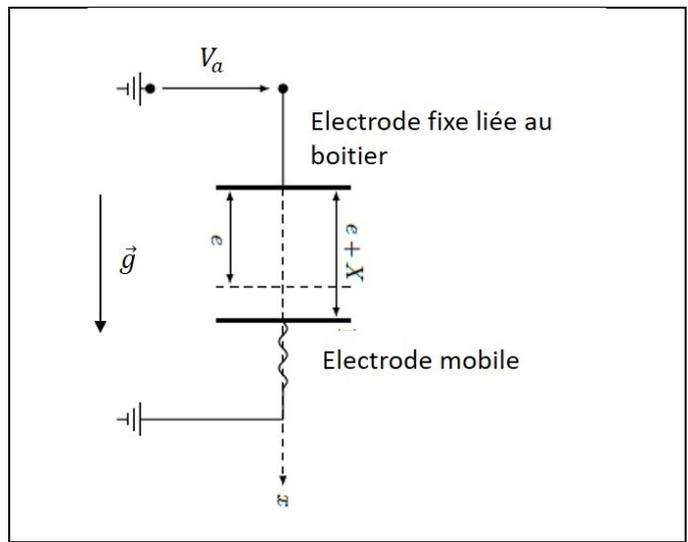


FIGURE 8. CONDENSATEUR FORME PAR LES DEUX ELECTRODES

A. Etude idéale

On considère dans un premier temps l'électrode fixe que l'on assimile au plan infini yOz chargé en surface de charge surfacique uniforme $+\sigma$.

47) En utilisant les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charges, montrer que le champ électrostatique $\vec{E}_1(M)$ créé par l'électrode fixe peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}_1(M) = E_1(x)\vec{e}_x$$

48) Comparer les champs $\vec{E}_1(M)$ et $\vec{E}_1(M')$ créés par l'électrode fixe en deux points M et M' symétriques par rapport à l'électrode fixe.

49) En appliquant le théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}_1(M)$ créé par l'électrode fixe en tout point de l'espace.

50) Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ qui règne dans le condensateur, composé des 2 électrodes, l'électrode fixe en $x = 0$ et l'électrode mobile en $x = e + X$.

51) Montrer que la différence de potentiel U entre les deux électrodes peut s'écrire :

$$U = \frac{Q}{S\epsilon_0}(e + X)$$

Où Q représente la charge portée par l'électrode fixe de surface S .

52) Montrer que la capacité C du condensateur s'écrit

$$C = C_0 \frac{e}{e + X}$$

Où C_0 est la capacité du condensateur pour $X = 0$.

B. Etude réelle

On s'intéresse ici au cas du condensateur plan avec des armatures de taille finie. Le calcul du champ électrique, ainsi que du potentiel électrostatique s'avère alors trop complexe et on fait appel à la simulation numérique. Le programme Python est donné en **Document 2**.

Tout au long de cette étude, nous nous placerons dans le plan xOy .

On souhaite calculer puis tracer le potentiel $V(x, y)$ et champ électrostatiques $\vec{E} = E_x(x, y)\vec{u}_x + E_y(x, y)\vec{u}_y$ créés par un condensateur plan.

53) Rappeler l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ créée par une charge ponctuelle q placée en $O(x_0, y_0)$ en un point $M(x_M, y_M)$ en fonction de q , ϵ_0 et OM , puis en fonction de q , ϵ_0 , x_0 , y_0 , x_M et y_M .

Expliquer ce que l'on fait dans la fonction **calculV** du programme. Pourquoi traite-t-on à part le cas $x_M = x_0$ et $y_M = y_0$?

54) Connaissant le potentiel électrostatique en M , comment peut-on en déduire le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en ce point ? On donnera la formule en faisant apparaître deux dérivées partielles mais sans essayer de résoudre l'équation.

Exprimer alors la composante du champ électrostatique suivant x , E_x , en fonction de $V(x + a, y)$, $V(x, y)$ et a . Faire de même pour la composante du champ électrostatique suivant y , E_y , en fonction de $V(x, y + a)$, $V(x, y)$ et a . A quelles lignes du programme utilise-t-on ce schéma numérique ?

Le programme donne en sortie la FIGURE 9.

55) Comparer la forme des lignes de champ par rapport à la question 28 et aux surfaces équipotentielles.

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 # Paramétrage
5 e_0 = 8.85*10**(-12)
6 q_cond = 10 ** (-14)
7 L_cond = 0.01
8 e_cond = 0.005
9 L = 0.015
10 objets = []
11
12 def ajouter_objet(x,y,q):
13     objets.append([x,y,q])
14
15 # Ajout d'un condensateur
16 xi = np.linspace(0, L_cond, 100)
17 for i in xi:
18     ajouter_objet(-L_cond/2 + i, - e_cond/2, q_cond)
19
20 for i in xi:
21     ajouter_objet(- L_cond/2 + i, e_cond/2, - q_cond)
22 no = len(objets)
23
24 # Maillage de l'espace
25 a = L / 100
26 x = np.linspace(- L/2, L/2, int(L/a))
27 y = np.linspace(- L/2, L/2, int(L/a))
28 X, Y = np.meshgrid(x,y)
29 nM = len(X)
30
31 # Calcul du potentiel
32 V = np.zeros((nM,nM))
33
34 def calculV(xM,yM,q,xO,yO):
35     if xM == xO and yM == yO :
36         return 0
37     else :
38         return q/(4*np.pi*e_0)*1/((xM-xO)**2+(yM-yO)**2)**(1/2)
39
40 for i in range(0,nM) :
41     for j in range (0,nM):
42         for k in range(0,no):
43             V[i,j] = V[i,j] + calculV(x[i], y[j], objets[k][2], objets[k][0], objets[k][1])
44
45 # Calcul du champ électrique
46 Ex = np.zeros((nM - 1, nM - 1))
47 Ey = np.zeros((nM - 1, nM - 1))
48
49 for i in range (0, nM-2) :
50     for j in range (0, nM-2) :
51         Ex[i,j] = - (V[i,j+1] - V[i,j]) / a
52         Ey[i,j] = - (V[i+1,j] - V[i,j]) / a
53
54
55 # Ajustage des matrices V, X et Y

```

```

56 Vajust = np.zeros((nM - 1, nM - 1))
57 for i in range (0, nM - 1) :
58     for j in range (0, nM - 1) :
59         Vajust[i,j] = V[i,j]
60
61 Xajust = np.zeros((nM - 1, nM - 1))
62 for i in range (0, nM - 1):
63     for j in range (0, nM - 1):
64         Xajust[i,j] = X[i,j]
65
66 Yajust = np.zeros((nM - 1, nM - 1))
67 for i in range (0, nM - 1):
68     for j in range (0, nM - 1):
69         Yajust[i,j] = Y[i,j]
70
71 # Affichage des courbes
72 schema = plt.contour(Xajust, Yajust, Vajust, 40)
73 cbar = plt.colorbar()
74 cbar.set_label("Potentiel en Volt")
75 plt.axis("equal")
76 plt.title("Equipotentielles et lignes de champ")
77 schema = plt.streamplot(Xajust, Yajust, Ex, Ey, linewidth=1, density=1)
78 plt.show()

```

Document 2. Programme Python

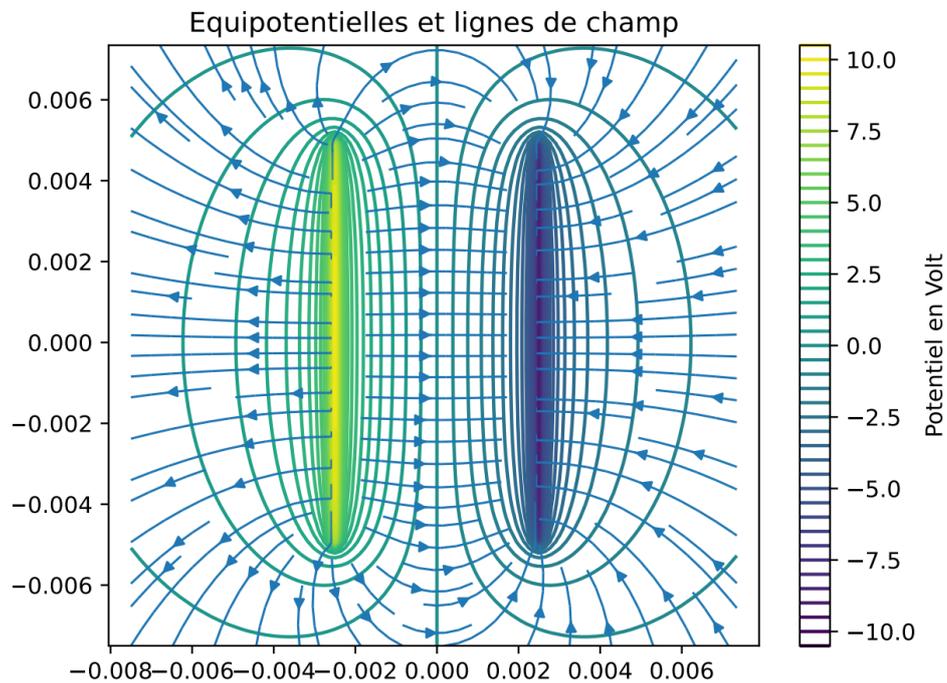


FIGURE 9. FIGURE TRACEE SOUS PYTHON

IV.2) Mesure des vibrations

Le condensateur précédent donc la capacité dépend de l'espacement de ses électrodes et donc des forces auxquelles est soumise l'armature mobile (dont le poids) est inséré dans un oscillateur à relaxation (FIGURE 10). Nous voulons montrer dans cette partie que la variation de la fréquence du signal oscillant nous permettra de mesurer des vibrations. On considère les amplificateurs linéaires intégrés idéaux (ALI idéaux) et on note $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$ leurs tensions de saturation. A $t = 0 s$, on suppose que la tension v vaut $+V_{sat}$ et que la tension u est nulle.

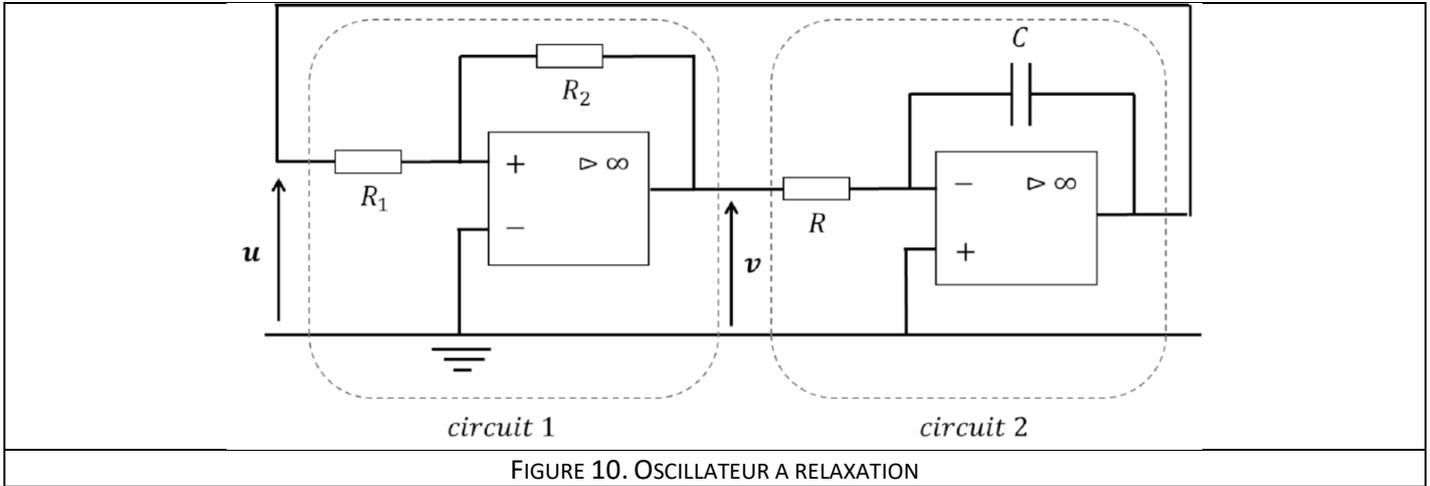


FIGURE 10. OSCILLATEUR A RELAXATION

A. Circuit 1

56) Préciser, en le justifiant, le mode de fonctionnement de l'ALI idéal. Pour quelle valeur de la tension d'entrée u , notée u_{seuil1} , la tension de sortie v bascule-t-elle de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$?

On admet que la tension de sortie v bascule de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$ pour une valeur de tension u_{seuil2} telle que :

$$u_{seuil2} = -u_{seuil1}$$

57) Tracer la tension v en fonction de la tension u en annotant soigneusement le tracé.

B. Circuit 2

Le circuit 2 est un montage intégrateur inverseur.

58) Montrer qu'on obtient la relation entrée-sortie suivante :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{v}{RC}$$

59) Si la tension v est constante et vaut $+V_{sat}$, quelle est l'allure du signal d'entrée u ?

C. Montage complet

Etudions à présent le montage complet. Les chronogrammes des tensions u et v sont donnés en FIGURE 11.

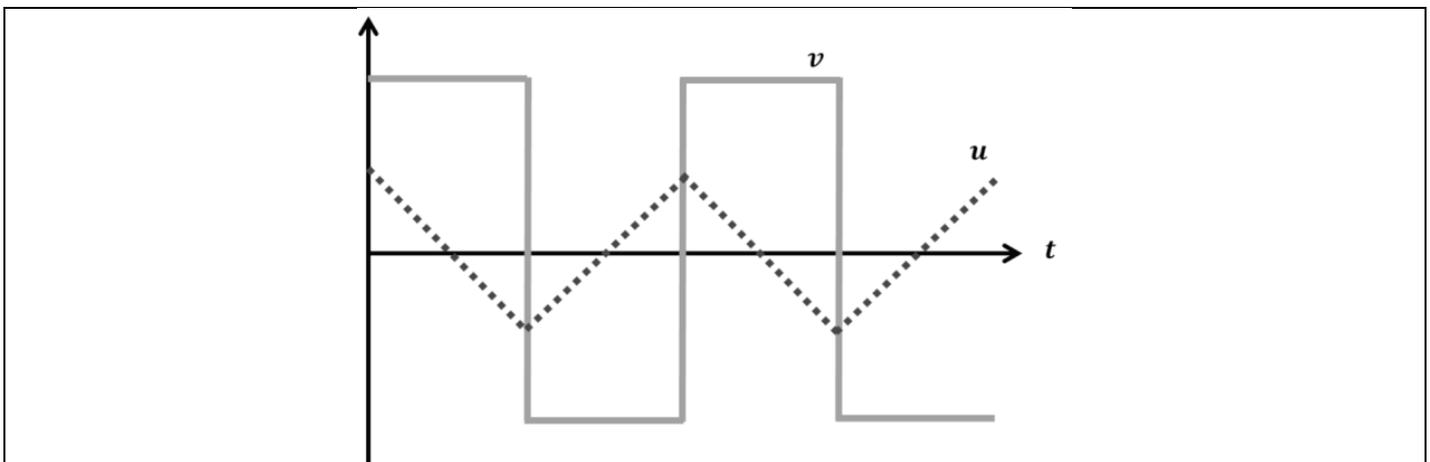


FIGURE 11. ALLURES TEMPORELLES DES SIGNAUX ISSUS DE L'OSCILLATEUR A RELAXATION

60) Exprimer la fréquence f de la tension u en fonction de R_1 , R_2 , R et C . Commenter.