Outils mathématiques

Extrait du programme

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique de la classe de TSI2 sont d'une part ceux qui figurent dans l'annexe 2 du programme de la classe de TSI1 et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » n'a pas fait l'objet d'une rubrique en première année. L'expression des différents opérateurs introduits sont exigibles en coordonnées cartésiennes. Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques et les formules d'analyse vectorielle ne sont pas exigibles ; elles doivent donc être systématiquement rappelées.

Dans le thème « équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant ainsi soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion. L'accent est mis sur le rôle des conditions aux limites.

Les capacités relatives à la notion de différentielle d'une fonction de plusieurs variables sont limitées à l'essentiel, elles sont mobilisées principalement dans les cours de thermodynamique et de chimie.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1. Géométrie	
Systèmes de coordonnées.	Utiliser le système de coordonnées sphériques.
2. Analyse vectorielle	
Gradient	Citer le lien entre le gradient et la différentielle. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
Divergence.	Utiliser le théorème d'Ostrogradski fourni. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Utiliser le théorème de Stokes fourni. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes. Utiliser la formule d'analyse vectorielle fournie : rot(rotA) = grad(divA) -ΔA .
3. Équations aux dérivées partielles	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de diffusion, équation de d'Alembert.	Identifier une équation aux dérivées partielle connue. Transposer une solution connue dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites.
4. Calcul différentiel	
Différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Dérivée partielle. Théorème de Schwartz.	Ecrire l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Identifier la valeur d'une dérivée partielle, l'expression de la différentielle étant donnée. Utiliser le théorème de Schwartz.

Sommaire

1 Calcul différentiel

1.1 Rappel : Fonctions d'une seule variable

1.1.1 Dérivée d'une fonction d'une seule variable

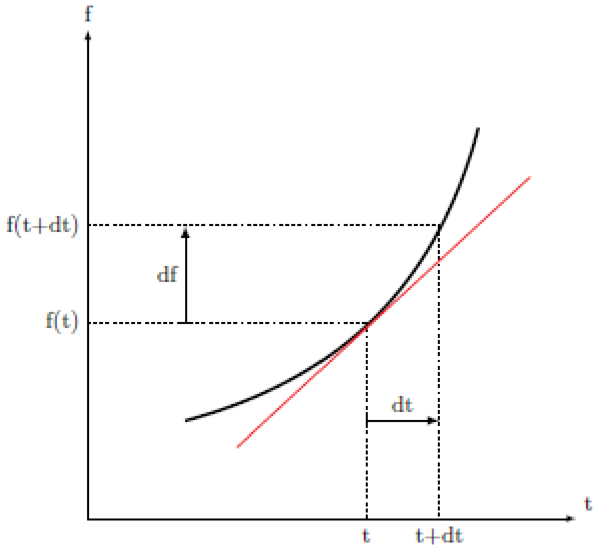
Considérons une fonction f dépendant d'une variable t que l'on note $f(t)$.
La dérivée de f par rapport à t est :

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{dt \to 0} \left(\frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} \right)$$

La notation "d" signifie que dt est infiniment petit. On dit que c'est un **élément infinitésimal**, donc $dt \to 0$.
Pour simplifier la notation de dérivée, on écrit donc tout simplement :

$$\boxed{\frac{df}{dt}(t) = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}}$$

La dérivée s'interprète géométriquement comme la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction f



<u>Notation</u> :

Vu en TSI1 : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ou encore $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

Dérivée seconde de f par rapport à t : $\frac{d^2f}{dt^2}$

Dérivée p-ième de f par rapport à t : $\frac{d^pf}{dt^p}$

<u>Exemple</u> :

On considère un point M se déplaçant selon l'axe Ox, alors $f(t) = x(t)$. La vitesse du point M selon Ox s'écrit :

1.1.2 Différentielle d'une fonction d'une seule variable

En multipliant par dt, on peut réécrire cette égalité d'une autre manière : $df(t) = f(t+dt) - f(t)$

$df(t)$ est nommée différentielle de f en t. La différentielle de f représente la variation de f lorsque t varie de t à $t + dt$.

<u>Exemple</u> :

Le déplacement élémentaire de M selon l'axe Ox est représenté par la différentielle de $x(t)$:

Soit un point se déplaçant de A vers B pendant un temps τ selon l'axe Ox à la vitesse uniforme v_0, alors :

1.1.3 Intégration d'une fonction d'une seule variable

L'intégration est l'opération inverse de la dérivation.

Exemple :

On considère un point M se déplaçant selon l'axe Ox. On connait la vitesse $v(t)$ du point M selon Ox. On souhaite retrouver sa position $x(t)$.

Remarque :

Toujours préciser les bornes d'une intégrale !

1.1.4 Exercices

1.1.4.1 Cinétique chimique

On s'intéresse à la réaction chimique suivante d'ordre 2 par rapport à A : $aA + bB \rightarrow cC + dD$

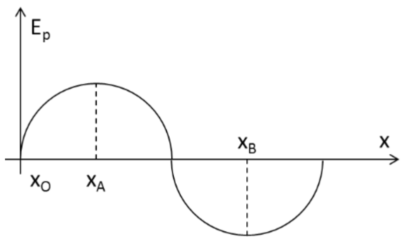
On rappelle que la vitesse volumique de réaction est définie par : $v = \frac{1}{V}\frac{d\xi}{dt} = k[A]^2$

1) Retrouver l'équation différentielle vérifiée par la concentration $[A]$.

2) Exprimer alors $[A]$ en fonction du temps.

1.1.4.2 Stabilité d'une position d'équilibre

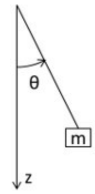
Le graphe suivant représente l'énergie potentielle d'un point M en fonction de la coordonnée cartésienne x. En $x = x_A$ et $x = x_B$, le point M passe par une position d'équilibre, la première instable, la seconde stable. On peut retrouver ces positions d'équilibres sans représentation graphique en utilisant la fonction énergie potentielle en fonction de la position. Ainsi :



Position d'équilibre : $\frac{dE_p}{dx}(x_e) = 0$ correspond à un extremum

Stabilité de l'équilibre : $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) > 0$ positions d'équilibre stable ; $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) < 0$ instable

On s'intéresse au mouvement de la masse m suspendue au bout d'un fil (cf figure). Son énergie potentielle de pesanteur peut se mettre sous la forme : $E_{pp} = -mgl\cos\theta$. En déduire alors les positions d'équilibres et leur stabilité relative. Tracer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de θ.



1.2 Fonctions de plusieurs variables

Les grandeurs qui vont être étudiées en physique-chimie cette année peuvent dépendre à la fois de la position et du temps. Ce sont donc des fonctions de plusieurs variables.

Exemple :

Dans une base cartésienne, la vitesse d'un point matériel se déplaçant selon Ox peut dépendre de x et t :

1.2.1 Dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables

On peut dériver une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une de ses variables, les autres étant fixées. On dit alors que l'on fait une dérivation partielle et on utilise la notation ∂.

Exemple :

Dérivée partielle de la vitesse par rapport à t :

Dérivée partielle de la vitesse par rapport à x :

Dérivée partielle de la vitesse par rapport à x, t étant fixé :

On a donc pour la dérivée partielle par rapport à x d'une fonction $f(x, y, z, t)$ de plusieurs variables :

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x}\right)_{y,z,t} = \frac{f(x+dx,y,z,t) - f(x,y,z,t)}{dx}$$

Remarque : intégration

De la même manière que pour la dérivation, une fonction $f(x, y, z, t)$ dépendant de plusieurs variables peut être intégrée par rapport à l'une de ses variables. Les autres variables sont alors fixées.

On note son intégrale par rapport à x :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,z,t)dx$$

Mais attention à ne pas oublier de préciser la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction !

1.2.2 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Comme pour une fonction d'une seule variable, on peut définir la différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Elle représentera sa variation pour une variation infinitésimale de chacune de ses variables.

Exemple :

Pour la vitesse d'un point matériel se déplaçant selon Ox qui peut dépendre de x et t, sa différentielle s'écrit :

On admet donc l'écriture suivante pour la différentielle d'une fonction $f(x, y, z, t)$ de plusieurs variables :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z,t} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z,t} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y,t} dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y,z} dt$$

En physique-chimie, la notion de différentielle est utilisée pour noter les variations élémentaires ou infinitésimales d'une grandeur.

Pour aller plus loin : Exercice sur les volumes molaires (1.5)

1.2.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Il est possible de dériver une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une de ses variables, puis par rapport à une autre. On parle alors de dérivée seconde, même si la variable a changé.

Exemple :

Dérivée seconde de la vitesse par rapport à t :

Dérivée seconde de la vitesse par rapport à x :

Dérivée seconde de la vitesse par rapport à t, puis par rapport à x :

Dérivée seconde de la vitesse par rapport à x, puis par rapport à t :

Théorème de Schwarz :

Pour une fonction $f(x, y, z, t)$ de classe C^2 (de dérivée première continue et dérivable et de dérivée seconde continue au point a), il est possible d'intervertir l'ordre de dérivation pour calculer la dérivée seconde au point a :

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial y \partial x}(a)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial x \partial z}(a) = \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial z \partial x}(a)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial x \partial t}(a) = \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial t \partial x}(a)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial y \partial z}(a) = \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial z \partial y}(a)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial y \partial t}(a) = \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial t \partial y}(a)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial z \partial t}(a) = \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial t \partial z}(a)$$

1.2.4 Intégration d'une fonction de plusieurs variables

Quand une grandeur dépend de plusieurs variables, on peut l'intégrer par rapport à deux de ses variables, on parle d'intégrale double.

L'intégrale double de la fonction $f(x,y,z)$ par rapport à x et y s'écrit : $\iint f(x,y,z)dxdy$

Lorsque l'on intègre par rapport à trois de ses variables, on parle d'intégrale triple.

L'intégrale triple de la fonction $f(x,y,z)$ par rapport à x,y et z s'écrit : $\iiint f(x,y,z)dxdydz$

Remarque :

Une intégrale double peut alors être aussi appelée intégrale de surface si les variables représentent une surface élémentaire (cf. partie 5).

De même, une intégrale triple peut être appelée intégrale de volume les variables représentent un volume élémentaire (cf. partie 5).

Si la fonction précédente peut s'écrire sous la forme : $f(x,y,z) = g(x)h(y)j(z)$, nous admettrons que, sous certaines conditions supposées vérifiées dans tout le cours de Physique-Chimie, :

$$\iiint g(x)h(y)j(z)dxdydz = \left(\int g(x)dx\right)\left(\int h(y)\,dy\right)\left(\int j(z)dz\right)$$

1.2.5 Exercices

1.2.5.1 Onde plane progressive monochromatique

Soit la fonction f telle que $f(x,t) = A\,cos(\omega t - kx + \varphi)$. Quelles sont les variables de cette fonction ? Donner les expressions des dérivées partielles premières et secondes. Que remarque-t-on ?

1.2.5.2 Résultante des forces de pression

Un piston comprime un fluide dans une conduite horizontale rectangulaire de hauteur H et de largeur L. On considère dans un premier temps que la pression au sein du fluide est uniforme et égale à P_1, tandis que la pression à l'extérieur du piston est égale à P_0.

1) Quelle est la résultante des forces de pression sur le piston ?

2) On considère maintenant le cas d'un barrage vertical de hauteur H et de largeur L. Ce barrage est trop haut pour pouvoir considérer la pression uniforme dans l'eau qu'il retient. Pour un axe Oz orienté vers le haut et une origine de l'axe prise à la surface de l'eau, la pression dans l'eau varie selon : $P(z) = P_0 - \mu gz \quad pour \quad z \leq 0$.

Pour pouvoir considérer la pression au sein de l'eau comme uniforme, il faut travailler sur une surface élémentaire sur laquelle la résultante des forces de pression peut s'écrire : $\overrightarrow{dF_s} = -P(M)dS\vec{n}$ où $\vec{n}$ est la normale extérieure à la surface.

Quelle est la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le barrage ?

1.3 Dérivée de fonctions composées

Considérons une fonction f qui dépend d'une variable x, cette variable x étant elle-même une fonction d'une variable t. On peut donc considérer f comme une fonction de x ou comme une fonction de t. On peut donc écrire $f(x)$ ou $f(t)$ ou $f\big(x(t)\big)$. En appliquant la formule de la dérivée d'une fonction composée, on obtient :

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Remarque :

La notation différentielle est donc particulièrement adaptée pour traiter les dérivées de fonctions composées car elle fait apparaître de manière explicite la variable choisie pour la dérivation.

Exemple :

L'énergie cinétique d'un point M se déplaçant selon Ox s'écrit :

Sa dérivée par rapport à v est donc :

Or, v est une fonction du temps t, on peut donc cherche à dérivée l'énergie cinétique par rapport à t :

1.3.1 Exercice

On s'intéresse à une onde progressive $s(x,t)$ qui se propage d'un point O vers un point M de coordonnée x telle que :

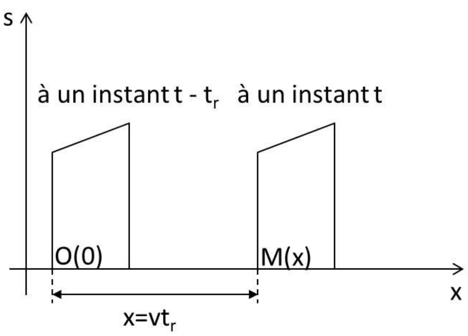
$$s(x,t) = s(M,t) = s(O, t - t_r)$$

Cette onde se propage à une vitesse v si bien que $t_r = \frac{x}{v}$ Alors :

$$s(x,t) = s\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = s\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

On peut traiter la fonction s comme une fonction composée en posant : $a = t - \frac{x}{v}$

Alors : $s(x,t) = s\big(a(t,x)\big)$



1) Montrer que : $\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial s}{\partial t}$

2) Montrer que $s(x,t)$ est solution de l'équation d'onde : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

1.4 Développements limités

En physique-chimie, la résolution des problèmes ne requiert souvent que la connaissance du comportement de fonctions physiques au voisinage d'un point. On cherche donc à remplacer l'expression de la fonction au voisinage d'un point donné, par une expression plus simple à manipuler et donc à étudier.

1.4.1 Formule de Taylor

Le développement limité à l'ordre p d'une fonction f au voisinage de x_0 est donnée par la formule de Taylor :

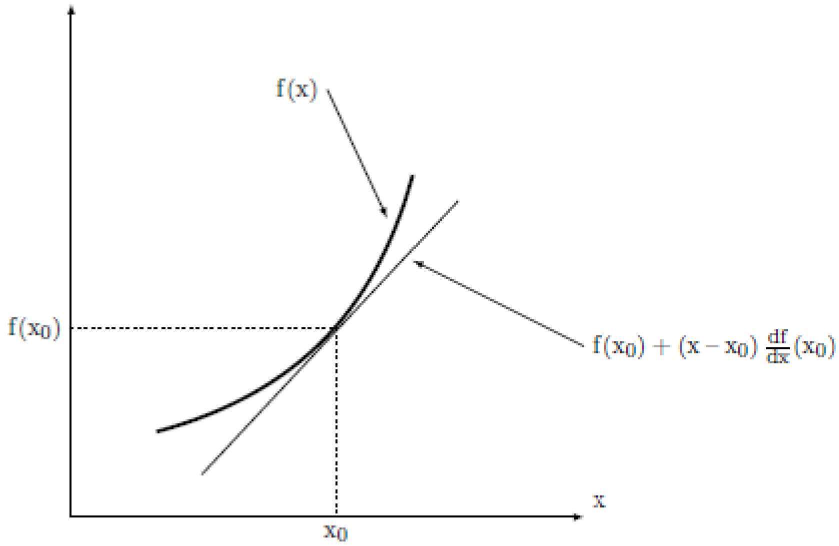
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{ordre\ 0} + \underbrace{(x-x_0)\frac{df}{dx}(x_0)}_{ordre\ 1} + \underbrace{\frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)}_{ordre\ 2} + \cdots + \underbrace{\frac{(x-x_0)^p}{p!}\frac{d^pf}{dx^p}(x_0)}_{ordre\ p}$$

1.4.2 Approximation linéaire

On se limitera la plupart du temps au développement limité à l'ordre 1 en physique ($|x-x_0| \ll 1$), ce qui donne :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\frac{df}{dx}(x_0)$$

Graphiquement, cela revient à confondre la fonction f avec sa tangente en x_0. On dit que l'on a linéarisé la fonction f au voisinage de x_0. Bien entendu, confondre les deux courbes n'a de sens qu'au "voisinage" de x_0 c.à.d. pour les x tels que $|x-x_0| \ll 1$.



Exemple :

On considère la vitesse d'un point M se déplaçant selon Ox. Cette vitesse dépend de x et de t.
On souhaite réaliser le développement limité à l'ordre 1 de la vitesse au voisinage de x_0.

1.4.3 Développements limités usuels en 0

Pour $x_0 = 0$ et $x \ll 1$, on obtient les développements limités usuels suivants :

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots\big(a-(n-1)\big)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$sin(x) = x + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$tan(x) = x + \ldots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

1.4.4 Exercice

Pour les fonctions suivantes, faire les approximations linéaires demandées en utilisant les développements limités usuels.

1) $(2+x)^2$ quand $x \to 0$

2) $\frac{1}{5-x}$ quand $x \to 0$

3) $\ln(3+x)$ quand $x \to 0$

1.5 Pour aller plus loin

Mélange liquide eau-éthanol

Le volume V d'un mélange miscible eau-éthanol dépend :

- De la température T de travail,
- De la pression P de travail,
- De la composition du mélange, c'est-à-dire de la quantité de matière en eau (notée n_{eau}) et de la quantité de matière en éthanol (notée n_{eth}). En effet, le volume occupé par un mole d'eau dans le mélange dépend de la quantité d'éthanol présente (ce phénomène étant lié aux interactions entre molécules).

Pour se convaincre de la situation voici un lien illustrant cette expérience :
https://culturesciences.chimie.ens.fr/thematiques/chimie-inorganique/chimie-des-solutions/contraction-du-volume-lors-d-un-melange-de

Données pour le problème :
Masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1g.mL^{-1}$
Masse volumique de l'éthanol : $\rho_{eth} = 0.789g.mL^{-1}$
Masse molaire de l'eau : $M_{eau} = 18g.mol^{-1}$
Masse molaire de l'éthanol : $M_{eth} = 46g.mol^{-1}$

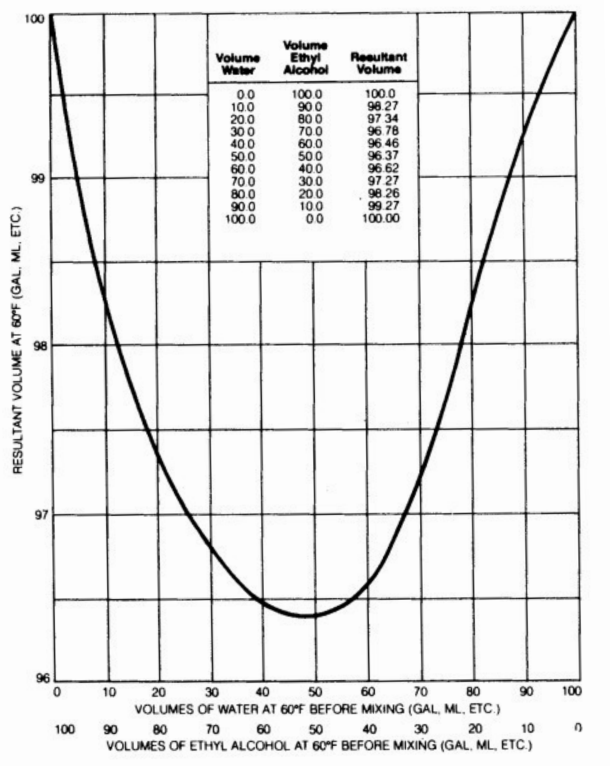
1) De combien de variables dépend le volume du mélange ? Dans le cadre de ce problème, on se place à température $T = 25°C$ et pression $P = 1\ bar$ fixées. Quelles sont alors les variables qui nous intéressent ?

La figure suivante représente le volume V du mélange en fonction d'eau, $V_{eau,introduit}$, et d'éthanol, $V_{eth,introduit}$, initiaux avant mélange. On appelle contraction du volume ΔV la grandeur définie par :

$$\Delta V = V - (V_{eau,introduit} + V_{eth,introduit})$$

2) D'après la figure, pour quelle valeur de $V_{eau,introduit}$ et $V_{eth,introduit}$ obtient-on la contraction maximum $|\Delta V|_{max}$? Donner sa valeur par lecture graphique.

Table 6.25: Resultant Volume When Ethyl Alcohol and Water are Mixed *(30)*



Volume Water	Volume Ethyl Alcohol	Resultant Volume
0.0	100.0	100.0
10.0	90.0	98.27
20.0	80.0	97.34
30.0	70.0	96.78
40.0	60.0	96.46
50.0	50.0	96.37
60.0	40.0	96.62
70.0	30.0	97.27
80.0	20.0	98.26
90.0	10.0	99.27
100.0	0.0	100.00

Pour étudier ce phénomène de contraction du volume, on définit les quantités suivantes :
Le volume molaire partiel de l'eau traduit la variation du volume du mélange par addition d'une mole d'eau à T, P et n_{eth} fixés :

$$V_{m,eau} = \left(\frac{\partial V}{\partial n_{eau}}\right)_{T,P,n_{eth}}$$

Le volume molaire partiel de l'éthanol traduit la variation du volume du mélange par addition d'une mole d'eau à T, P et n_{eau} fixés :

$$V_{m,eth} = \left(\frac{\partial V}{\partial n_{eth}}\right)_{T,P,n_{eau}}$$

3) Donner l'expression de la différentielle du volume dV du mélange en fonction des volumes molaires partiels $V_{m,eau}$ et $V_{m,eth}$.

L'identité d'Euler nous permet de calculer le volume du mélange selon la relation suivante :

$$V = n_{eau}V_{m,eau} + n_{eth}V_{m,eth}$$

L'eau pure présente un volume molaire noté $V^*_{m,eau}$ et l'éthanol pur présente un volume molaire $V^*_{m,eth}$.

4) Montrer que la contraction de volume ΔV peut se mettre sous la forme :

$$\Delta V(n_{eau}, n_{eth}) = n_{eau}\left(V_{m,eau}(n_{eau}, n_{eth}) - V^*_{m,eau}\right) + n_{eth}\left(V_{m,eth}(n_{eau}, n_{eth}) - V^*_{m,eth}\right)$$

Si on note n_t le nombre total de mole en solution : $n_t = n_{eau} + n_{eth}$, on peut calculer :

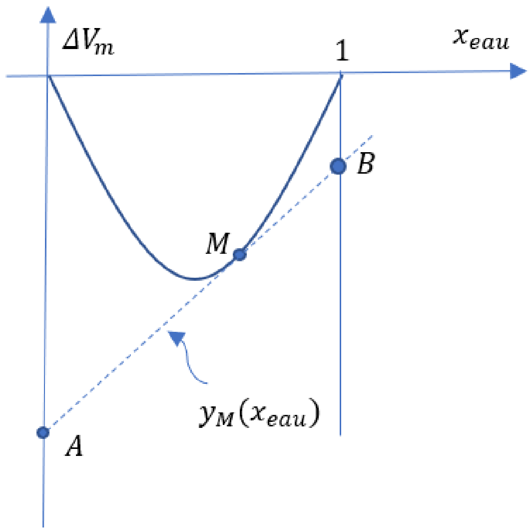
$$\frac{\Delta V(n_{eau}, n_{eth})}{n_t} = \Delta V_m(x_{eau}, x_{eth}) \; avec \; x_{eau} = \frac{n_{eau}}{n_t} \; et \; x_{eth} = \frac{n_{eth}}{n_t}$$

x_{eau} et x_{eth} sont les fractions molaires en eau et éthanol ($x_{eau} + x_{eth} = 1$).

5) Montrer que ΔV_m peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta V_m = x_{eau}\left(\left(V_{m,eau} - V^*_{m,eau}\right) - \left(V_{m,eth} - V^*_{m,eth}\right)\right) + V_{m,eth} - V^*_{m,eth}$$

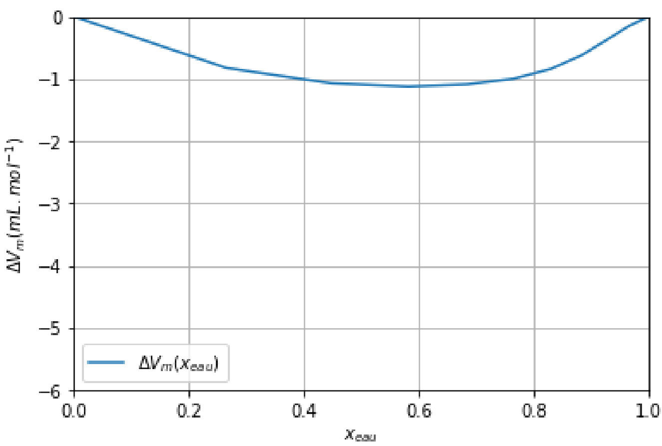
6) Donner l'expression de $\left(\frac{\partial \Delta V_m}{\partial x_{eau}}\right)_{T,P}$.



La figure suivante représente la variation de ΔV_m avec x_{eau}.
La tangente en un point M y est tracée. Son équation est donnée par :

$$y_M(x_{eau}) = \left(V_{m,eth} - V^*_{m,eth}\right) + x_{eau}\left(\frac{\partial \Delta V_m}{\partial x_{eau}}\right)_{T,P}(x_M)$$

7) Justifier que la lecture de ΔV_m au point A permet de connaître $\left(V_{m,eth} - V^*_{m,eth}\right)$ et que la lecture de ΔV_m au point B permet de connaître $\left(V_{m,eau} - V^*_{m,eau}\right)$.



8) Un technicien de laboratoire souhaite préparer 100 mL de solution d'un mélange eau-éthanol avec une fraction molaire $x_{eau} = 0{,}8$. En déduire le volume d'eau et d'éthanol à additionner en utilisant le graphique ci-contre.

2 Géométrie

2.1 Systèmes de coordonnées

A un référentiel d'étude s'associe un repère de centre O servant à définir ce référentiel. La position d'un point M est définie à un instant t par le vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

2.1.1 Coordonnées cartésiennes

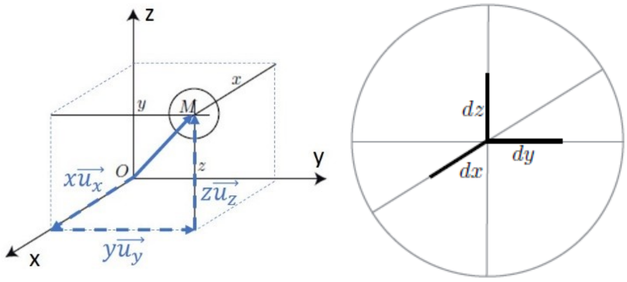
Dans le repère $\Re(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, on utilise les coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\Re}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}_{\Re}$$



2.1.2 Coordonnées cylindriques

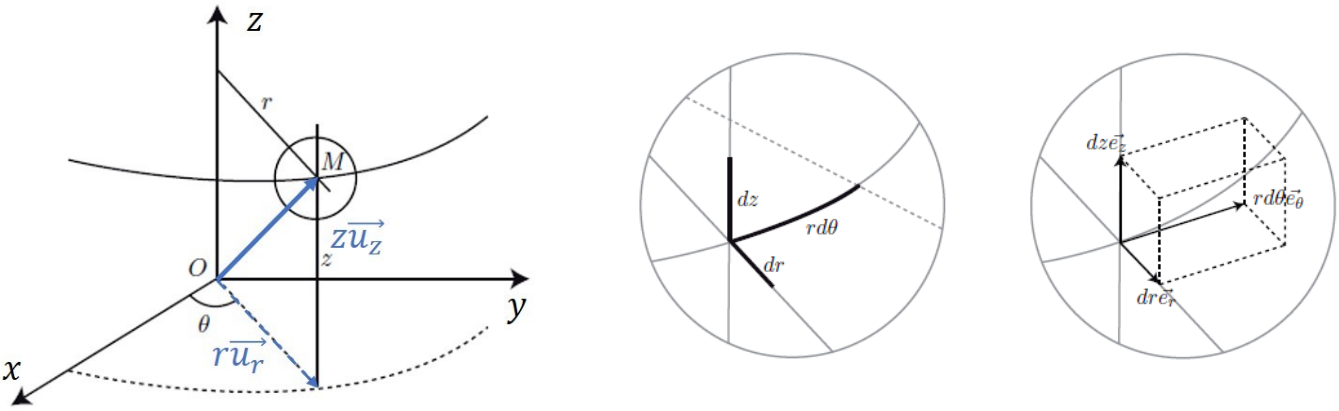
Dans le repère $\Re_{cyl}(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$, on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z).

Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{\Re_{cyl}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{pmatrix}_{\Re_{cyl}}$$



2.1.3 Coordonnées sphériques

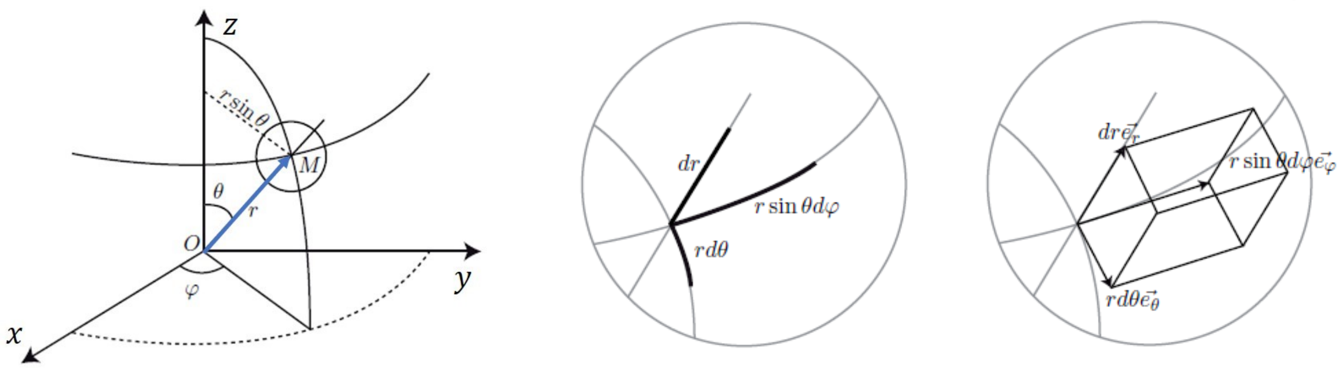
Dans le repère $\Re_{sph}(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$, on utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ).

Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_{sph}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\, d\varphi\overrightarrow{u_\varphi} = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ r\sin\theta\, d\varphi \end{pmatrix}_{\Re_{sph}}$$



2.2 Surfaces et volumes élémentaires

2.2.1 Intérêt et méthodologie

Les grandeurs physiques (pression, champs, forces, …) que nous allons étudier cette année ne seront pas forcément uniformes. Elles peuvent alors varier en fonction des coordonnées choisies. Pour pouvoir les considérer uniforme, nous serons alors amenés à travailler sur de petites surfaces, appelées surfaces élémentaires, ou de petits volumes, appelés volumes élémentaires.
Pour pouvoir exprimer ces surfaces ou volumes élémentaires, la méthode est la suivante :

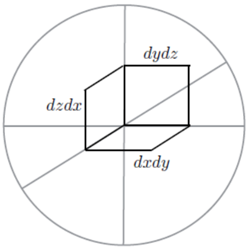
- Bien choisir le type de coordonnées adapté à la symétrie du problème
- Dessiner l'élément de volume ou de surface avant de l'exprimer mathématiquement
- Bien repérer les paramètres qui varient, leurs bornes et les paramètres qui restent fixes.

Pour calculer une surface ou un volume, il faut alors intégrer les surfaces ou volumes élémentaires correspondants. Ces intégrales sont des intégrales multiples. Leur résolution est abordée dans la partie 3.

2.2.2 Coordonnées cartésiennes

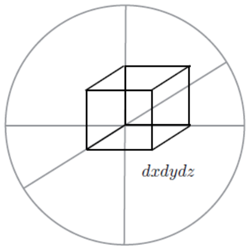
Surface élémentaire

$$\begin{cases} x = cte & dS = dydz \\ y = cte & dS = dxdz \\ z = cte & dS = dxdy \end{cases}$$



Volume élémentaire

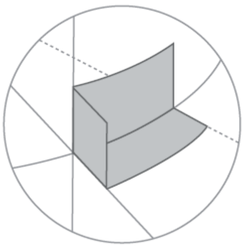
$$dV = dxdydz$$

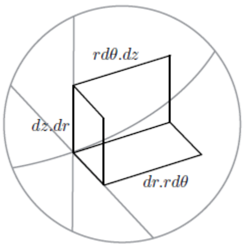


2.2.3 Coordonnées cylindriques

Surface élémentaire

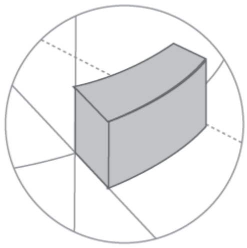
$$\begin{cases} r = cte & dS = rd\theta dz \\ \theta = cte & dS = drdz \\ z = cte & dS = rdrd\theta \end{cases}$$





Volume élémentaire

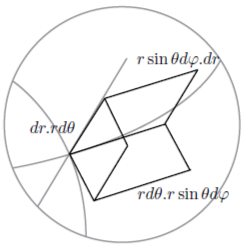
$$dV = rdrd\theta dz$$



2.2.4 Coordonnées sphériques

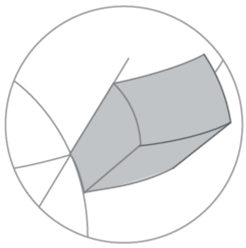
Surface élémentaire

$$\begin{cases} r = cte & dS = r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi \\ \theta = cte & dS = r \sin\theta \, drd\varphi \\ \varphi = cte & dS = rdrd\theta \end{cases}$$



Volume élémentaire

$$dV = r^2 \sin\theta \, drd\theta d\varphi$$



2.3 Exercices

2.3.1 Les systèmes de coordonnées

1) Comment définit-on la vitesse d'un point matériel M dans le repère $\Re_{cyl}(O,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z})$? En déduire l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques.

2) Dans une base cartésienne, le point M parcourt un carré de côté a. Quelle est la distance D parcourue par le point M au bout d'un tour ? On posera un repère adapté (faire un dessin) et on utilisera des intégrales.

3) Dans une base cylindrique, le point M parcourt un cercle de rayon a. Quelle sera la distance D parcourue par le point M au bout d'un tour (utiliser une intégrale) ? Comparer au périmètre du cercle.

4) Même question en coordonnées sphériques lorsque le point M parcourt un cercle de rayon a dans le plan Oxy.

2.3.2 Surfaces et volumes élémentaires

5) Retrouver l'aire d'un carré de côté $\boldsymbol{a}$.

6) Retrouver le volume d'un parallélépipède de côté a selon x, b selon y et c selon z.

7) Retrouver l'expression de la surface latérale d'un cylindre de rayon r_0 et de hauteur h.

8) Retrouver le volume d'un cylindre de rayon $r_0$et de hauteur h.

9) Quelle est la surface comprise entre deux cercles concentriques de rayons $r_0\ et\ r_1$?

10) Retrouver le volume d'une sphère de rayon r_0.

11) Retrouver la surface d'une sphère de rayon r_0.

3 Analyse vectorielle

3.1 Gradient

3.1.1 Définitions et propriétés

Soit $f(x,y,z)$ une fonction de plusieurs variables dépendant des coordonnées cartésiennes (x,y,z).

Définition : Le gradient permet de construire un champ de vecteur à partir d'un champ scalaire. En coordonnées cartésiennes :	$\overrightarrow{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_z}$

Lien avec la différentielle :

Différentielle de la fonction $f(x,y,z)$: $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz$

Vecteur déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}$

On remarque que l'on peut écrire la différentielle de $f(x,y,z)$ à l'aide du gradient sous la forme :

$$df = \overrightarrow{grad}(f) \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Interprétation physique : Le vecteur $\overrightarrow{grad}(f)$ est perpendiculaire aux surfaces de niveau ($f = cte$) ou encore iso-f. Il est orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.

En effet, sur une surface iso- f : $df = 0$ donc $\overrightarrow{grad}(f) \perp d\overrightarrow{OM}$

Si on se déplace ($d\overrightarrow{OM}$) dans le sens donné par le gradient ($\overrightarrow{grad}(f)$), alors $df > 0$. On va dans le sens des valeurs croissantes de f.

Définition :

Un champ de vecteur $\vec{a}$ est dit champ de gradient si il existe une fonction scalaire f telle que : $\vec{a} = \overrightarrow{grad}(f)$

f est appelé potentiel scalaire du champ $\vec{a}$ et est défini à une constante additive près.

Alors pour tout contour fermé, on a : $\oint_{\Gamma} \vec{a}.\overrightarrow{dl} = 0$

3.1.2 Exercice

1) <u>Pour épater les potes au ski</u>

Commenter le tracé du télésiège par rapport aux courbes de niveaux (isohypses) que l'on peut trouver sur une carte IGN de la Cime du Chavalet à Auron.

Tracer le vecteur $\overrightarrow{grad}(h)$ sur la carte.

2) <u>Dans le cadre de la conduction thermique</u>

En 3D, la loi de Fourier qui décrit les transferts thermiques par conduction est donnée par : $\overrightarrow{J_{th}} = -\lambda\overrightarrow{grad}(T)$

Retrouver la loi de Fourier dans le cas d'une propagation de la chaleur unidimensionnelle suivant $\overrightarrow{u_x}$.

Si on prend le cas d'une barre isolée latéralement et dirigée selon $\overrightarrow{u_x}$. La partie gauche de la barre est au contact d'un thermostat de température T_1 et la partie droite à une température $T_2 < T_1$. En régime stationnaire, représenter les surfaces iso-T, surfaces sur lesquelles la température est constante. Sur le même schéma, représenter alors le vecteur $\overrightarrow{grad}(T)$, puis le vecteur $\overrightarrow{J_{th}}$. Commenter.

3) <u>Dans le cadre de la statique des fluides</u>

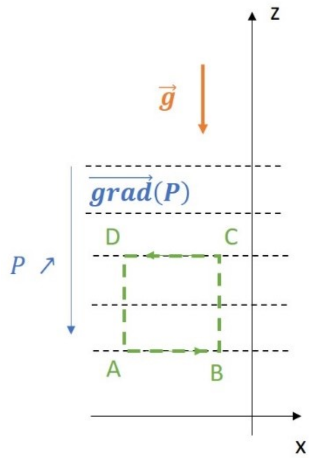
La relation de la statique des fluides est donnée dans le cas où l'axe Oz est ascendant par :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g$$

Dans un cas plus général, il est possible de relier $\vec{g}$ à $\overrightarrow{grad}(P)$. Retrouver cette relation. Commenter.

Soit le cadre $\Gamma = ABCD$, monter que l'intégrale suivante est nulle :

$$\oint_\Gamma \vec{g}.\overrightarrow{dl} = 0$$



4) <u>Dans le cadre de la mécanique du point</u>

On dit qu'une force est conservative si elle dérive d'une énergie potentielle. On peut ainsi exprimer l'énergie potentielle à partir de l'expression d'une force par :

$$dE_p = -\vec{F} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

Relier $\vec{F}$ à $\overrightarrow{grad}\left(E_p\right)$. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur, E_{pp}. En appliquant l'expression précédente, retrouver l'expression du poids, $\vec{P}$. Représenter sur un schéma cette force et les courbes iso-E_{pp}.

En prenant le même contour qu'à la question précédente, que peut-on dire de :

$$\oint_\Gamma \vec{P}.\overrightarrow{dl}$$

5) <u>Et en électrostatique ?</u> Vous verrez dans le prochain cours.

3.2 Divergence

3.2.1 Définitions et propriétés

Soit $\vec{a}$ un champ de vecteur tel qu'en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} = a_x\overrightarrow{u_x} + a_y\overrightarrow{u_y} + a_z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} a_x(x,y,z) \\ a_y(x,y,z) \\ a_z(x,y,z) \end{pmatrix}_{\Re_{cart}}$$

a_x, a_y, a_z représentent les composantes du vecteur $\vec{a}$ selon les trois axes du repère $\Re_{cart}$ et chacune de ces composantes dépend des trois coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Définition : La divergence permet de construire un champ scalaire à partir d'un champ de vecteur. En coordonnées cartésiennes :	$div(\vec{a}) = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$

Interprétation physique : Le signe de la divergence de $\vec{a}$ calculée en un point est lié au caractère convergent ou divergent des lignes de champs à partir de ce point.

Théorème d'Ostrogradsky :
Soit une surface fermée S limitant un volume fini V à l'intérieur duquel est défini un champ de vecteur $\vec{a}$. Si les dérivées partielles de $\vec{a}$ sont bornées dans V alors :

$$\oiint_S \vec{a} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V (div\vec{a})dV$$

Interprétation physique : La divergence représente le flux sortant d'une surface fermée localement par unité de volume.

3.2.2 Exercices

1) Retour en mécanique des fluides

Rappeler les hypothèses nécessaires pour obtenir la conservation du débit volumique sur un tube de courant de surface S. Que vaut alors l'intégrale suivante : $\oiint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}$?

On dit aussi que ce type d'écoulement est non divergent. Expliquez.

2) Que nous dit l'électrostatique ?

Rappeler le théorème de Gauss. A quelle condition peut-on dire que $div(\vec{E}) = 0$? Sinon, que peut-on dire du signe de $div(\vec{E})$ autour d'une charge positive ? autour d'une charge négative ?

3) Mais aussi la magnétostatique

Que peut-on dire du flux du champ magnétostatique ? En déduire la valeur de $div(\vec{B})$. Est-il possible de voir des lignes de champs magnétiques partir d'un point ?

3.3 Rotationnel

3.3.1 Définitions et propriétés

Soit $\vec{a}$ un champ de vecteur tel qu'en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} = a_x\overrightarrow{u_x} + a_y\overrightarrow{u_y} + a_z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} a_x(x,y,z) \\ a_y(x,y,z) \\ a_z(x,y,z) \end{pmatrix}_{\Re_{cart}}$$

a_x, a_y, a_z représentent les composantes du vecteur $\vec{a}$ selon les trois axes du repère $\Re_{cart}$ et chacune de ces composantes dépend des trois coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Définition :
Le rotationnel permet de construire un champ de vecteur à partir d'un champ de vecteur.
En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z}$$

Interprétation physique : Il exprime la tendance qu'ont les lignes de champ d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point.

Moyen mnémotechnique : (en coordonnées cartésiennes) : $\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$

Définition :

Un champ de vecteur $\vec{b}$ est dit champ de rotationnel si il existe un vecteur $\vec{a}$ tel que : $\vec{b} = \overrightarrow{rot}(\vec{a})$

Alors pour toute surface fermée, on a : $\oiint_S \vec{b}.\overrightarrow{dS} = 0$

Théorème de Stokes :
Soit une surface ouverte S s'appuyant sur un contour fermé C dans une région de l'espace V où est défini un champ de vecteur $\vec{a}$, alors :

$$\oint_C \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{a}) \cdot \overrightarrow{dS}$$

Interprétation physique :
Le rotationnel représente la circulation le long d'un contour fermé localement par unité de surface.

3.3.2 Exercices

1) Retour en mécanique des fluides

On parle parfois d'écoulement rotationnel ou tourbillonnaire. Que peut-on en déduire sur $\overrightarrow{rot}(\vec{v})$?

2) Que nous dit l'électrostatique ?

Que peut-on dire de la circulation du champ électrostatique ? En déduire la valeur de $\overrightarrow{rot}(\vec{E})$. Est-il possible de voir des lignes de champ électrique se refermer sur elles-mêmes ?

3) Mais aussi la magnétostatique

Rappeler le théorème d'Ampère. A quelle condition peut-on dire que $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$? On dit que les lignes de champ magnétique tourbillonnent autour de leur source. Commenter.

3.4 Laplacien

3.4.1 Laplacien d'un champ scalaire

Soit $f(x, y, z)$ une fonction de plusieurs variables dépendant des coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Définition :
Le laplacien permet de construire un champ scalaire à partir d'un champ scalaire.
En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$

Interprétation physique :
L'équation de Laplace $\Delta f = 0$ traduit le fait que la solution f est toujours égale à sa moyenne prise sur un voisinage. Par exemple, la hauteur d'une membrane attachée par son bord satisfait l'équation de Laplace. Ceci traduit le fait que la hauteur de la membrane en un point est toujours égale à la moyenne des hauteurs sur un petit cercle centré en ce point.

Relation avec la divergence et le gradient :

$$\Delta f = div\left(\overrightarrow{grad}(f)\right)$$

3.4.2 Laplacien d'un champ de vecteurs

Soit $\vec{a}$ un champ de vecteur tel qu'en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} = a_x\overrightarrow{u_x} + a_y\overrightarrow{u_y} + a_z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} a_x(x,y,z) \\ a_y(x,y,z) \\ a_z(x,y,z) \end{pmatrix}_{\Re_{cart}}$$

a_x, a_y, a_z représentent les composantes du vecteur $\vec{a}$ selon les trois axes du repère $\Re_{cart}$ et chacune de ces composantes dépend des trois coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Définition :
Le laplacien permet aussi de construire un champ de vecteur à partir d'un champ de vecteur.
En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\Delta}(\vec{a}) = (\Delta a_x)\overrightarrow{u_x} + (\Delta a_y)\overrightarrow{u_y} + (\Delta a_z)\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right) \end{pmatrix}_{\Re_{cart}}$$

Relation avec la divergence, le gradient et le rotationnel :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{a})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{a})\right) - \vec{\Delta}(\vec{a})$$

3.4.3 Exercices

1) Montrer que : $\Delta f = div\left(\overrightarrow{grad}(f)\right)$.

2) <u>En mécanique</u>

a) Dans les exercices sur le gradient, on a montré que l'on pouvait trouver la relation suivante entre une force conservative $\vec{F}$ et l'énergie potentielle E_p dont elle dérive :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$$

Qu'obtient-on si on fait $div(\vec{F})$?

b) Dans le cas d'un mouvement selon l'axe Ox, comment peut-on réécrire la formule précédente ? Cette équation nous permet d'accéder à la stabilité des positions d'équilibres d'un mouvement. Expliquer.

c) Prenons le cas de la force gravitationnelle exercée par la masse M sur la masse m. Rappeler son expression et donner le signe de sa divergence autour de M. Si l'on se trouve à une position d'équilibre, celle-ci sera-t-elle stable ou instable ?

3) <u>En conduction thermique</u>

a) Rappeler la loi de Fourier en 1D selon Ox. D'après les exercices sur le gradient, comment peut-on l'écrire en 3D ?
Le vecteur densité de flux thermique peut donc s'écrire en 3D : $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th,x}\overrightarrow{u_x} + j_{th,y}\overrightarrow{u_y} + j_{th,z}\overrightarrow{u_z}$

b) Un bilan d'énergie sur un volume élémentaire donne l'équation différentielle suivante en 1D selon Ox :

$$\frac{\partial j_{th,x}}{\partial x} + c\mu\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Comment réécririez-vous ce bilan en 3D ?

c) Dans le cas d'un transfert d'énergie par conduction thermique, rappeler l'équation de la diffusion thermique en 1D selon Ox. En utilisant les questions a et b, comment l'écririez-vous en 3D ?

d) Dans le cas d'un régime stationnaire, que peut-on dire de ΔT ? En résolvant cette équation en 1D selon Ox, montrer que T est toujours égale à sa moyenne prise sur un voisinage.

4) <u>En électrostatique</u>

a) Rappeler la loi locale liant le champ et le potentiel électrostatique.

b) Entre les armatures d'un condensateur, que peut-on dire de $div(\vec{E})$? que peut-on donc dire de ΔV ?

c) En supposant que les armatures du condensateur précédent sont de tailles infinies et se trouvent en $x = 0$ et $x = e$, l'armature en $x = 0$ étant portée au potentiel U_0 et celle en $x = e$ au potentiel U_1, résoudre l'équation précédente. Comment sont les équipotentielles au sein d'un condensateur plan ?

5) Montrer que : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{a})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{a})\right) - \vec{\Delta}(\vec{a})$.

4 Questions de cours

1) Donner l'expression de la différentielle de la fonction $f(x)$.

2) Donner l'expression de la dérivée de la fonction $f\big(x(t)\big)$ par rapport à t.

3) Quelle est la différence entre la notation d et la notation ∂ ? On pourra donner des exemples.

4) Que dit le théorème de Schwartz ?

5) Donner l'expression de la différentielle de la fonction $f(x, y, z, t)$.

6) Donner le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de : $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $g(x) = e^x$.

7) Donner le développement limité à l'ordre 1 de : $f(x) = (1+x)^\alpha$ et $g(x) = ln(1+x)$.

8) En coordonnées cartésiennes, donner l'expression du vecteur déplacement élémentaire.

9) En coordonnées cylindriques, donner l'expression du vecteur position et du vecteur déplacement élémentaire.

10) En coordonnées cartésiennes, donner les expressions des différentes surfaces élémentaires et du volume élémentaire.

11) En coordonnées cylindrique, donner les expressions des différentes surfaces élémentaires et du volume élémentaire.

12) Donner les expressions en coordonnées cartésiennes des opérateurs : gradient, divergence, rotationnel et laplacien.

13) Citer le lien entre le gradient et la différentielle.

14) Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient.