

Magnétostatique

Extrait du programme

L'étude de la magnétostatique menée dans la partie **4.2 « Magnétostatique »** s'appuie le plus possible sur les différents aspects qualitatifs et quantitatifs vus en première année ; les étudiants sont donc déjà familiarisés avec le concept de champ magnétostatique.

On aborde les propriétés intégrales du champ et on utilise le théorème d'Ampère pour des calculs dans des cas présentant un haut degré de symétrie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2. Magnétostatique	
Vecteur densité de courant volumique. Intensité du courant. Distributions de courant électrique volumique et linéique.	Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant volumique. Justifier la modélisation d'une distribution de courant par une distribution filiforme.
Symétries et invariances des distributions de courant.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courants. Identifier les invariances d'une distribution de courants. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de courants pour prévoir des propriétés du champ magnétostatique créé.
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	Identifier les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère en vue de déterminer l'expression d'un champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Modèles du fil rectiligne infini de section non nulle et du solénoïde infini.	Justifier le choix d'une modélisation d'une distribution de charges par une distribution infinie. Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ magnétostatique créées par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à l'évolution de la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de ligne de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.

Outils numériques

Outils numériques	Capacités exigibles
Représentation graphique d'un champ scalaire ou vectoriel.	Utiliser les fonctions de base (contour et streamplot) de la bibliothèque matplotlib (leurs spécifications étant fournies) pour représenter des lignes de niveau ou des lignes de champs.

Sommaire

EXTRAIT DU PROGRAMME	1
OUTILS NUMERIQUES	1
SOMMAIRE	2
1 MISE EN EVIDENCE DU CHAMP MAGNETIQUE ET EXPERIENCE	3
1.1 BOUSSOLE.....	3
1.2 EXPERIENCE D’OERSTED.....	3
1.3 VISUALISATION DE LIGNES DE CHAMP.....	3
2 DISTRIBUTIONS DE COURANTS ELECTRIQUES	4
2.1 COURANT ELECTRIQUE ET DISTRIBUTIONS FILIFORMES	4
2.2 VECTEUR DENSITE DE COURANT VOLUMIQUE.....	4
3 SYMETRIES ET INVARIANCES DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE	6
3.1 SYMETRIES DE LA DISTRIBUTION DE COURANTS	6
3.2 INVARIANCES DE LA DISTRIBUTION DE COURANTS	8
4 PROPRIETES DU CHAMP MAGNETIQUE	9
4.1 FLUX DU CHAMP MAGNETIQUE.....	9
4.2 CIRCULATION DU CHAMP MAGNETIQUE.....	9
4.3 THEOREME D’AMPERE.....	10
5 DISTRIBUTIONS A HAUT DEGRE DE SYMETRIE	11
5.1 METHODE DE RESOLUTION	11
5.2 FIL RECTILIGNE INFINI PARCOURU PAR UN COURANT I.....	11
5.3 CYLINDRE PARCOURU PAR UN COURANT VOLUMIQUE.....	12
5.4 SOLENOÏDE « INFINI » CIRCULAIRE PARCOURU PAR UN COURANT I	13
6 QUESTIONS DE COURS	14
7 EXERCICES D’APPLICATION DIRECTE DU COURS	15
7.1 SYMETRIES DE LA DISTRIBUTION DE COURANTS	15
7.2 INVARIANCE DE LA DISTRIBUTION DE COURANTS.....	15
7.3 CONSERVATION DU FLUX DE B	15
7.4 CIRCULATION DU CHAMP MAGNETIQUE.....	16
8 REVISIONS SUR L’INDUCTION	17
8.1 RAPPELS	17
8.2 CADRE DANS UN CHAMP UNIFORME	17
8.3 BOBINAGE SUR UN NOYAU TORIQUE	17
8.4 BARRES MOBILES SUR DEUX RAILS	18
9 DM 14 POUR LE 15/01/2024	19

Nous avons étudié jusqu'à présent les interactions entre des particules chargées immobiles. Mais que se passe-t-il si les particules chargées sont en mouvement ?

Ces particules chargées en mouvement vont créer des courants électriques. L'étude des effets dus à ces courants électriques s'appelle le magnétisme. Notre propos se limitera à la magnétostatique, c'est à dire à la description des phénomènes magnétiques indépendants du temps.

Nous allons reprendre dans un premier temps quelques expériences de visualisation de lignes de champ déjà vu en TS11 pour resituer l'étude.

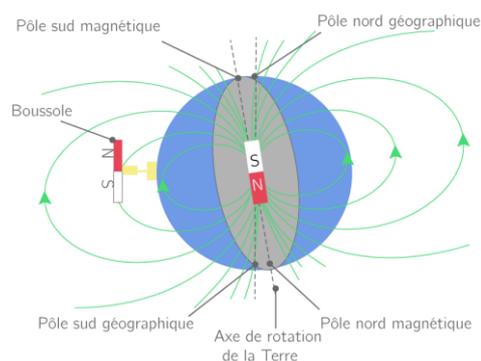
1 Mise en évidence du champ magnétique et expérience

1.1 Boussole

Utilisée pour connaître le Nord magnétique terrestre. La Terre génère un champ magnétique.

Attention :

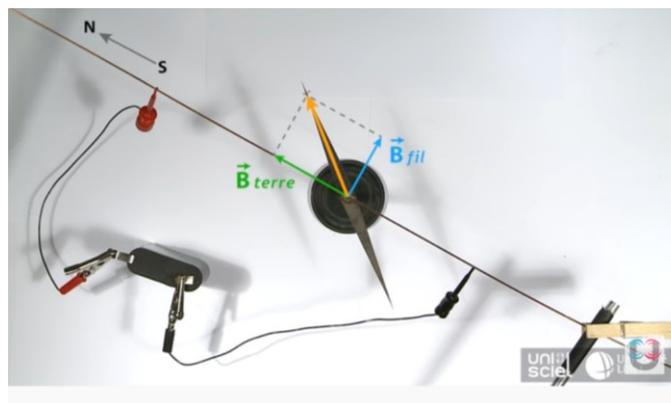
On parle de pôle Nord, mais cela correspond en fait au pôle Sud de l'aimant constitué par la Terre.



1.2 Expérience d'Oersted

On branche un générateur aux bornes de la maquette Pierron contenant un fil et une aiguille. Lorsque l'on met en marche le générateur, l'aiguille s'oriente perpendiculairement au fil.

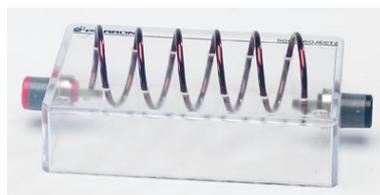
En effet, le fil génère un champ magnétique et l'aiguille s'aligne selon ce champ.



1.3 Visualisation de lignes de champ

A l'aide de différentes maquettes, de limaille de fer et d'un générateur de courant, on est capable de faire apparaître les lignes de champ magnétique de différents circuits et aimants.

On remarque que le champ magnétique s'enroule autour d'un fil et est uniforme dans un solénoïde.



2 Distributions de courants électriques

Le cours de première année a permis de présenter la conduction de l'électricité comme une migration de porteurs de charges.

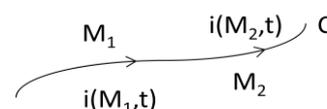
2.1 Courant électrique et distributions filiformes

Définition :

L'intensité I (en A) du courant électrique à travers une surface S est liée à la charge dq qui traverse S pendant dt . Elle dépend de l'orientation de S .

Un fil conducteur de faible section à l'échelle macroscopique peut être assimilé à une courbe C (sans épaisseur). Dans cette modélisation, la seule information à laquelle nous avons accès est la quantité de charge passant au point M par unité de temps, c'est à dire l'intensité $I(M, t)$.

La flèche tracée indique l'orientation du vecteur unitaire normal à une section du fil. Un déplacement de charges positives dans le sens de la flèche ou de charges négatives dans le sens contraire correspond à un courant $I(M, t) > 0$.



Remarques :

En régime permanent, la charge mobile étant uniformément répartie dans le conducteur et ne pouvant s'accumuler en aucun point du fil, nous pouvons en déduire les propriétés suivantes :

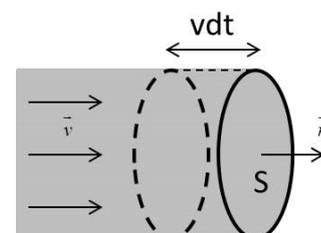
-
-

On pourra noter l'analogie avec le débit massique.

2.2 Vecteur densité de courant volumique

Dans un conducteur (métal, électrolyte, ...), on considère un ensemble de particules de charge q , de densité volumique n et animées d'un mouvement d'ensemble de vitesse \vec{v} . La densité volumique de charges mobiles est notée :

Dans le cas où la normale à la surface \vec{n} est colinéaire à la vitesse \vec{v} uniforme sur la surface et de même sens, l'intensité du courant traversant S s'écrit :



Définition :

Le vecteur densité de courant volumique \vec{j} (A.m⁻²) associé à un mouvement d'ensemble de particules à la vitesse \vec{v} est :

Dans un cas plus général, lorsque la densité de courant volumique n'est pas identique en tout point de la surface, on utilise un calcul de flux à travers la surface.

Définition :

L'intensité du courant électrique traversant une surface S est égale au flux du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}(M, t)$ à travers cette surface.

Remarques :

Dans le cas où les particules qui contribuent au courant électrique sont réparties en différentes espèces, alors :

$$\vec{j} = \sum_k q_k n_k \vec{v}_k$$

Le signe de l'intensité du courant électrique dépend donc de l'orientation de la surface.

Analogie avec le débit massique ou volumique, mais surtout le vecteur densité de flux thermique

3 Symétries et invariances du champ magnétostatique

De manière générale, le calcul de champ magnétostatique n'est pas simple. Calculer un champ vectoriel c'est en effet trouver sa direction, son sens et sa norme en tout point de l'espace. En étudiant les symétries de la distribution de charges, on peut heureusement en déduire dans certains cas la direction et le sens du champ magnétostatique.

3.1 Symétries de la distribution de courants

3.1.1 Plan de symétrie

<p><u>Définition</u> :</p> <p>Une distribution de courant possède un plan de symétrie Π si :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Π est un plan de symétrie géométrique de la distribution - si tout point P de la distribution a une image P' appartenant à la distribution $\vec{j}(P') = \text{sym}[\vec{j}(P)]$ 	
<p><u>Propriété</u> :</p> <p>Si le plan Π est plan de symétrie de la distribution de courant, alors ce plan est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique.</p>	
<p><u>Conséquence</u> :</p> <p>Si M appartient au plan de symétrie Π, alors le champ magnétique est perpendiculaire au plan de symétrie Π :</p> $\vec{B}(M) \perp \Pi$	

3.1.2 Plan d'antisymétrie

<p><u>Définition :</u> Une distribution de courant possède un plan d'antisymétrie Π^* si :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Π^* est un plan de symétrie géométrique de la distribution - si tout point P de la distribution a une image P' appartenant à la distribution $\vec{j}(P') = -sym[\vec{j}(P)]$ 	
<p><u>Propriété :</u> Si le plan Π^* est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, alors ce plan est un plan de symétrie pour le champ magnétostatique.</p>	
<p><u>Conséquence :</u> Si M appartient au plan d'antisymétrie Π^*, alors le champ magnétique appartient au plan d'antisymétrie $\Pi^* : \vec{B}(M) \parallel \Pi^*$</p>	

3.1.3 Symétrie du champ magnétostatique

Le champ magnétostatique a des propriétés de symétrie opposées à celle de la distribution de courants.

Remarques :

Le champ magnétique a les propriétés de symétrie d'un **vecteur axial** ou « **pseudo-vecteur** ».

Pour trouver la direction du champ magnétostatique en un point M , on cherchera donc les plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de courants contenant le point M .

On dit qu'une distribution de courants présente un haut degré de symétrie si l'étude des propriétés de symétries de la distribution permet de connaître la direction du champ magnétostatique en tout point de l'espace.

3.2 Invariances de la distribution de courants

Définition :

Une distribution de courants est invariante par translation lorsque l'image de la distribution par la translation est la distribution elle-même.

Si la distribution de courants est invariante par translation selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Remarque :

Ceci n'est possible qu'avec une distribution s'étendant jusqu'à l'infini.

Définition :

L'invariance par rotation correspond au cas où la distribution obtenue après rotation se superpose rigoureusement avec la distribution initiale que ce soit en position dans l'espace ou en valeur locale de la densité de courants.

Si la distribution de courants est invariante par rotation autour d'un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

4 Propriétés du champ magnétique

4.1 Flux du champ magnétique

Propriété :

Le flux du champ magnétique ϕ (en Weber : $\text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2$) à travers une surface fermée est nul. On dit que le champ magnétique est à **flux conservatif**.

Remarque :

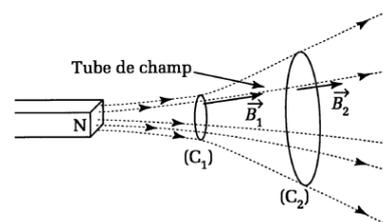
Analogie à la conservation du débit volumique

Conséquences sur la topographie du champ magnétique :

Le flux du champ magnétique garde la même valeur à travers toutes les sections d'un même tube de champ. Il s'évase en se dirigeant vers les champs faibles.

Il est impossible de créer un champ magnétique où les lignes de champ partiraient toutes d'un même point, puisque cela signifierait que le flux du champ magnétique qui entoure ce point est non nul.

Les lignes de champ magnétostatique ne divergent pas à partir de leur source (les courants) : elles « tourbillonnent » autour de cette source (opérateur rotationnel).



4.2 Circulation du champ magnétique

Exemple : Fil rectiligne illimité de direction Oz

Le champ magnétique généré par ce fil se met sous la forme : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

La circulation du champ magnétique sur un circuit fermé Γ est donnée par l'expression suivante :

On peut distinguer deux cas :
Le circuit n'entoure pas le fil :

Le circuit entoure le fil :

4.3 Théorème d'Ampère

Théorème d'Ampère :



Remarque :

On peut appliquer le théorème de superposition au champ magnétique.

I_{int} correspond à la somme algébrique de toutes les intensités intérieures à Γ (ou enlacées par Γ). L'intensité est comptée positivement si elle traverse Γ dans le sens positif ou direct (règle du tire-bouchon).

Conséquences sur la topographie du champ magnétique :

Un tire-bouchon qui tourne dans le sens du courant (respectivement sens des lignes de champ) progresse dans le sens du champ à l'intérieur du circuit (respectivement sens de l'intensité du courant) + petit bonhomme d'Ampère.

5 Distributions à haut degré de symétrie

5.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution (en utilisant le théorème d'Ampère) :

- 1- Rechercher les symétries et invariances.
- 2- Choisir le contour orienté et fermé d'Ampère
- 3- Calcul du champ magnétostatique

5.2 Fil rectiligne infini parcouru par un courant I

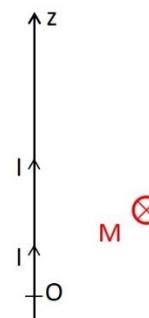
On considère un fil rectiligne infini confondu avec l'axe Oz et parcouru par un courant I . Le courant et l'axe Oz sont orientés dans le même sens. Ce système modélise un circuit fermé comportant une portion rectiligne de longueur L grande devant la distance r au point M où est évalué le champ \vec{B} . Le point $M(r, \theta, z)$ est repéré par ses coordonnées cylindriques.

Modélisation d'une situation courante : fil quelconque parcouru par un courant permanent qui crée un champ magnétique en un point M voisin du fil

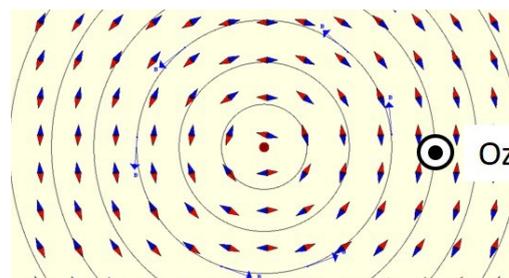
5.2.1 Symétrie et invariance

Symétries :

Invariances :



5.2.2 Contour d'Ampère



5.2.3 Calcul du champ magnétostatique

Circulation :

Courant intérieur :

Théorème d'Ampère :

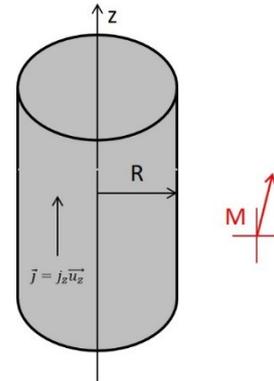
5.3 Cylindre parcouru par un courant volumique

Un cylindre infini de rayon R et d'axe Oz est parcouru par un courant volumique $\vec{j} = j_z \vec{u}_z$ ($j_z > 0$) uniforme. On cherche à déterminer le champ magnétique en tout point.

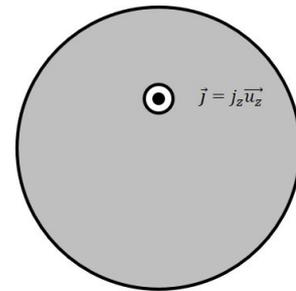
5.3.1 Symétrie et invariance

Symétries :

Invariances :



5.3.2 Contour d'Ampère



5.3.3 Calcul du champ magnétostatique

Circulation :

Courant intérieur :

Théorème d'Ampère :

5.4 Solénoïde « infini » circulaire parcouru par un courant I

On considère un solénoïde d'axe Oz de taille infinie. Le solénoïde est constitué de spires jointives enroulées sur un cylindre : soit R son rayon et n son nombre de spires par unité de longueur. Il est parcouru par un courant d'intensité I . Nous calculons ici le champ en tout point intérieur au solénoïde.

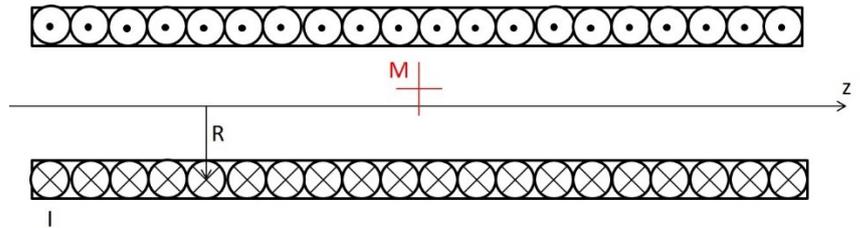
Le point $M(r, \theta, z)$ est repéré par ses coordonnées cylindriques.

Modélisation d'une situation courante : champ magnétique créé dans une bobine

Hypothèse supplémentaire : le champ magnétostatique est nul à l'extérieur du solénoïde (à comprendre avec les lignes de champ).

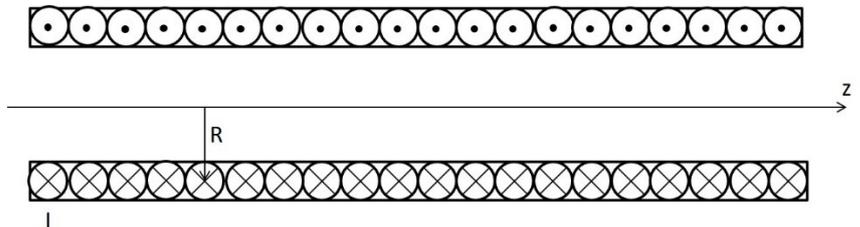
5.4.1 Symétrie et invariance

Symétries :



Invariances :

5.4.2 Contour d'Ampère



5.4.3 Calcul du champ magnétostatique

Circulation :

Courant intérieur :

Théorème d'Ampère :

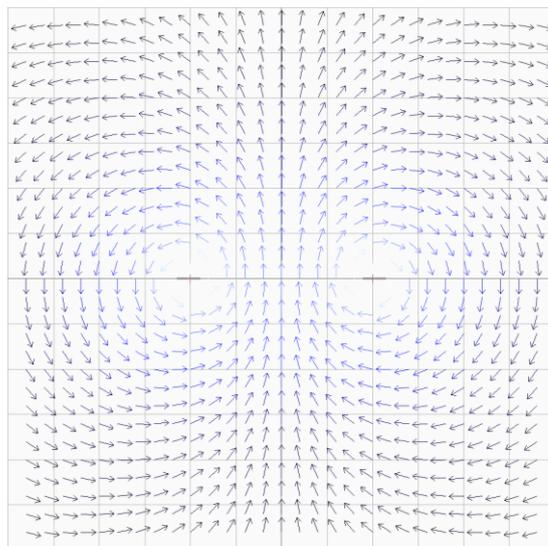
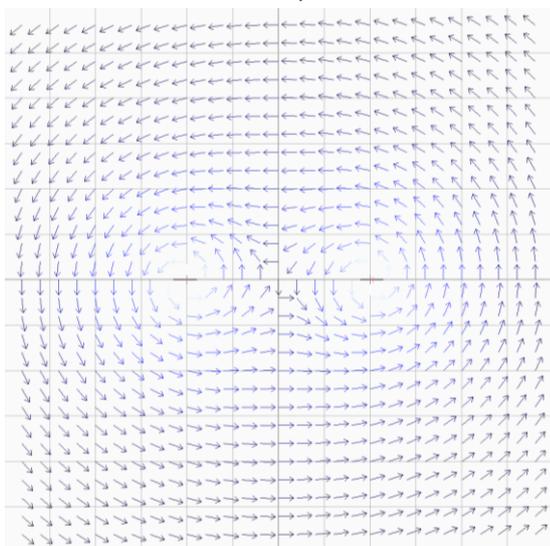
6 Questions de cours

- 1) Donner la définition de l'intensité du courant électrique. Relier courant électrique et flux du vecteur densité de courant volumique. Comment exprimer le vecteur densité de courant volumique pour un mouvement d'ensemble de porteurs de charges ? On donnera les noms et unités de grandeurs utilisées.
- 2) Définir les notions de plans de symétrie et d'anti-symétrie pour une distribution de courants. Quelle est la conséquence pour le champ magnétostatique ?
- 3) Quelle propriété a le flux du champ magnétique (faire une phrase et donner une expression mathématique) ? Donner son unité. Quelle conséquence cela a-t-il sur les lignes de champ ?
- 4) Énoncer le théorème d'Ampère.
- 5) Retrouver l'expression du champ magnétostatique généré par un fil infini parcouru par un courant I en tout point de l'espace.
- 6) Retrouver l'expression du champ magnétostatique généré par un cylindre infini parcouru par un courant volumique selon l'axe du cylindre en tout point de l'espace.
- 7) Retrouver l'expression du champ magnétostatique généré par un solénoïde infini parcouru par un courant I en tout point intérieur du solénoïde, sachant que le champ extérieur est nul.

7 Exercices d'application directe du cours

7.1 Symétries de la distribution de courants

- 1) Soit un fil infini parcouru par un courant I . Déterminer les plans de symétrie de la distribution de courants. En déduire la direction du champ magnétostatique en un point M situé à une distance r de l'axe du fil ?
- 2) Soit une spire circulaire parcourue par un courant I . Déterminer les plans de symétrie de la distribution de courants. Que peut-on en déduire sur la direction du champ magnétostatique en un point M situé sur l'axe de la spire ?
- 3) Soit un solénoïde infini composé de N spires en série parcourues par un courant I . Déterminer les plans de symétrie de la distribution de courants. Que peut-on en déduire sur la direction du champ magnétostatique en un point M situé à l'intérieur du solénoïde ?
- 4) Retrouver les plans de symétrie du champ magnétostatique correspondant aux deux distributions de courants ci-dessous. Retrouver le sens de parcours des deux fils.



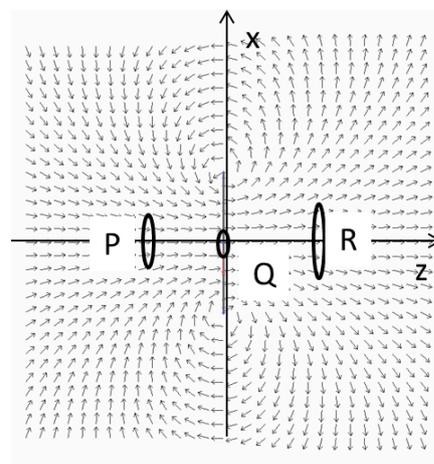
7.2 Invariance de la distribution de courants

- 1) Soit un fil infini parcouru par un courant I . De quelles coordonnées dépend le champ magnétostatique ?
- 2) Soit une spire circulaire parcourue par un courant I . De quelles coordonnées dépend le champ magnétostatique ?
- 3) Soit un solénoïde « infini » composé de n spires par unité de longueur en série parcourues par un courant I . De quelles coordonnées dépend le champ magnétostatique ?

7.3 Conservation du flux de B

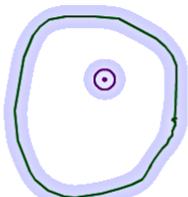
Sur une carte de champ magnétique, ont été délimitées 3 surfaces autour des points P, Q et R.

- 1) Comparer les intensités du champ en P, Q et R.
- 2) La distribution de courants à l'origine de cette carte de champ magnétique est invariante par rotation autour de l'axe Oz . L'identifier à partir d'un examen qualitatif des lignes.
- 3) Justifier alors, a posteriori, la relation d'ordre proposée initialement.



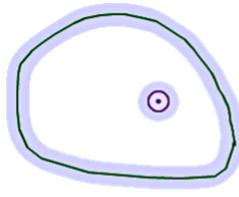
7.4 Circulation du champ magnétique

Différentes distributions de courants sont données ci-dessous. Pour chacune d'entre elles, la valeur de la circulation du champ magnétique calculée sur le contour tracé est donnée. Retrouver le sens des contours dessinés. Expliquer la valeur de la circulation trouvée.



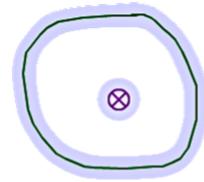
circulation du champ : $\mu_0 \cdot i^*(1)$

(a)



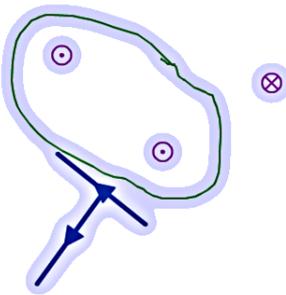
circulation du champ : $\mu_0 \cdot i^*(-1)$

(b)



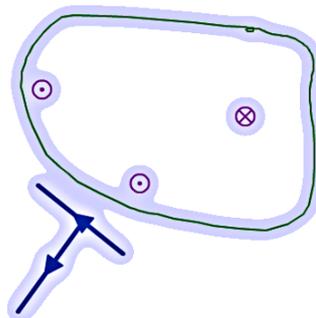
circulation du champ : $\mu_0 \cdot i^*(-1)$

(c)



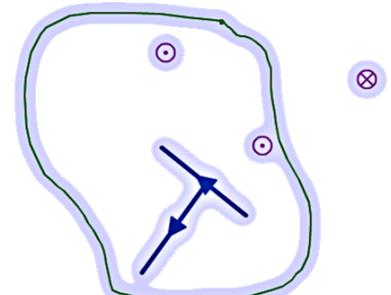
circulation du champ : $\mu_0 \cdot i^*(2)$

(d)



circulation du champ : $\mu_0 \cdot i^*(1)$

(e)



circulation du champ : $\mu_0 \cdot i^*(2)$

(f)

8 Révisions sur l'induction

8.1 Rappels

Deux cas d'induction : - circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps
- circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Forces de Laplace : $\vec{dF} = I \vec{dl} \wedge \vec{B}$

Moment résultant : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{M} = I \vec{S}$: moment magnétique

Flux du champ magnétique : $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$

Si \vec{B} uniforme sur la surface S et colinéaire à \vec{dS} , alors : $\Phi = BS$

Loi de Lenz : l'induction par ses effets s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance

Loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ avec e : force électromotrice

Flux propre : flux de \vec{B} créé par le circuit au travers de même circuit, Φ_{propre}

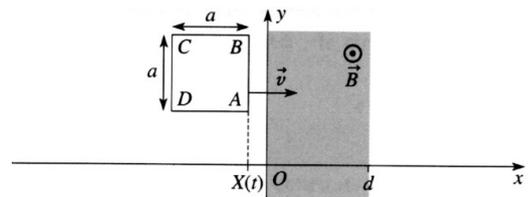
Inductance propre : $\Phi_{propre} = LI$

Flux de mutuelle inductance : flux de \vec{B} créé par le circuit 1 au travers d'un circuit 2 $\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{dS}$

Inductance mutuelle : $\Phi_2 = MI_1$ si influence totale $M = \sqrt{L_1 L_2}$

8.2 Cadre dans un champ uniforme

On suppose que le champ magnétique B est uniforme et constant entre les plans ($x = 0$) et ($x = d$), et nul ailleurs. Un cadre conducteur carré, de côté a ($a < d$), de résistance totale R et de côtés parallèles aux axes (Ox) et (Oy), circule avec une vitesse constante v. On désigne par X(t) l'abscisse du côté avant du cadre.



Le but de l'exercice est de déterminer le mouvement du cadre pour cela on effectuera l'étude pour différentes valeurs de X(t) :

- a) $X(t) < 0$: Le cadre n'est pas encore dans la zone de champ magnétique.
- b) $0 < X(t) < a$: Le cadre entre dans la zone de champ magnétique.
- c) $a < X(t) < d$: Le cadre est entièrement dans la zone de champ magnétique.
- d) $d < X(t) < d + a$: Le cadre sort de la zone de champ magnétique.
- e) $d + a < X(t)$: Le cadre est entièrement sorti de la zone de champ magnétique.

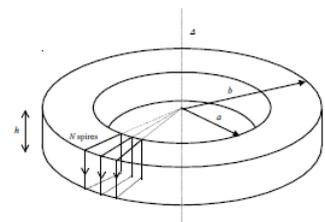
Pour chaque cas de figure, faire les étapes suivantes :

- 1) Faire un schéma.
- 2) Exprimer la force électromotrice induite. En déduire le courant induit.
- 3) Exprimer la force de Laplace s'exerçant sur le cadre.
- 4) Donner l'équation du mouvement du cadre. En déduire l'allure de la vitesse du cadre.

8.3 Bobinage sur un noyau torique

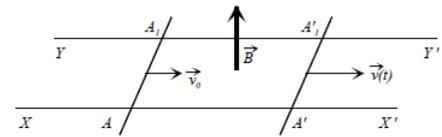
Une bobine est constituée de N spires pratiquement jointives enroulées en une seule couche sur un tore de section carrée. On note a le rayon intérieur du tore et b le rayon extérieur et h la largeur du tore.

- 1) Déterminer le champ magnétique lorsqu'un courant d'intensité I parcourt le circuit.
- 2) Déterminer le flux du champ magnétique propre à travers l'une des spires. En déduire une expression de l'inductance propre du bobinage.
- 2) Un second circuit est bobiné sur le tore, le nombre de spires est N'. Déterminer le coefficient d'induction mutuelle.
- 3) Application numérique : $a = 3$ cm, $h = 8$ mm. Les bobinages ont respectivement 200 et 50 spires. Quelle approximation peut-on faire si $h \ll a$? Quel modèle de solénoïde obtient-on alors ?



8.4 Barres mobiles sur deux rails

Sur deux rails rectilignes parallèles horizontaux XX' et YY' , de résistance négligeable, sont placées deux barres mobiles horizontales AA_1 et $A'A'_1$ perpendiculaires aux rails. La distance entre les rails est $l = 10\text{cm}$; la résistance de la partie de chaque barre comprise entre les deux rails est $R = 1\ \Omega$; chaque barre a une masse $m = 10\ \text{g}$. L'ensemble étant soumis à l'action d'un champ magnétique vertical B uniforme d'intensité $B = 1\ \text{T}$, on déplace la barre AA_1 en l'approchant de $A'A'_1$, avec une vitesse constante $v_0 = 20\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ normale à AA_1 . Etudier la loi des vitesses $v(t)$ de la barre $A'A'_1$. Tracer le graphe de $v(t)$.



9 DM 14 pour le 15/01/2024

On notera μ_0 et ε_0 la perméabilité et la permittivité du vide respectivement avec :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1} \text{ et } \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$$

On étudie ici un modèle simplifié de transformateur schématisé en Figure 1. Il est constitué d'un matériau magnétique torique d'axe (Oz) à section carrée de côté a et de rayon intérieur R . On suppose que le milieu magnétique est parfait. L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ illustrée pour un point M quelconque sur le schéma.

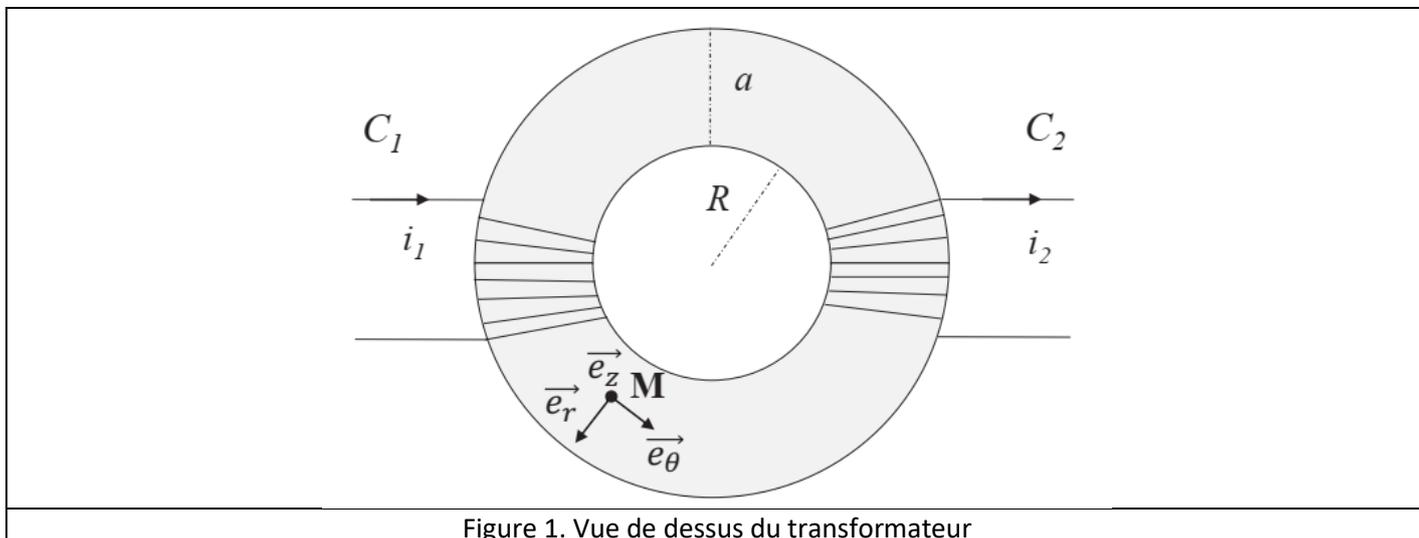


Figure 1. Vue de dessus du transformateur

Le bobinage dit « primaire » noté C_1 est enroulé en N_1 spires tout autour de ce tore. Il est parcouru par un courant d'intensité i_1 . Le bobinage dit « secondaire » noté C_2 est, de la même manière, enroulé en N_2 spires régulièrement réparties tout autour de ce tore et est parcouru par un courant d'intensité i_2 .

- 1) Justifier soigneusement que le champ magnétique \vec{B}_1 créé à l'intérieur du tore par le courant circulant dans C_1 est de la forme :

$$\vec{B}_1(r, \theta, z) = B_1(r, z)\vec{e}_\theta$$

- 2) En appliquant le théorème d'Ampère à un contour Γ soigneusement précisé, démontrer que le champ magnétique \vec{B}_1 créé par le circuit C_1 en tout point à l'intérieur du tore est donné par :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

- 3) Etablir l'expression du flux magnétique ϕ du champ magnétique \vec{B}_1 à travers une spire du circuit C_1 . Pourquoi n'est-il pas nul ?
 4) En déduire le flux total ϕ_1 au travers des N_1 spires du circuit C_1 .
 5) Rappeler la définition de l'inductance propre L (ou coefficient d'auto-inductance). En déduire que l'inductance propre L_1 du circuit C_1 est donnée par :

$$L_1 = N_1^2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

- 6) Quelle est alors l'expression de l'inductance propre L_2 du circuit C_2 ?
 7) Rappeler la définition du coefficient de mutuelle inductance M . Démontrer que ce coefficient M est donné par :

$$M = N_1 N_2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

- 8) Quel phénomène entraîne l'apparition d'une force électromotrice e_1 dans le primaire ? Exprimer alors e_1 en fonction de L_1 et $\frac{di_1}{dt}$ en précisant la loi utilisée.
 9) La résistance des bobinages étant négligée, exprimer la tension u_1 aux bornes du primaire en fonction des dérivées par rapport au temps de i_1 et i_2 et des coefficients L_1 et M .
 10) Faire de même pour la tension u_2 aux bornes du secondaire en fonction des dérivées par rapport au temps de i_1 et i_2 et des coefficients L_2 et M .

11) En déduire que l'on a la relation suivante :

$$u_1 = \frac{L_1}{M} u_2 + \frac{M^2 - L_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt}$$

12) Prouver que cette relation se simplifie pour faire apparaître ce que l'on appelle le rapport de transformation, défini comme le rapport des tensions du secondaire et du primaire :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

13) L'électricité doit être produite et transportée en temps réel jusqu'aux lieux de consommation. Le transport se fait sur un réseau à Très Haute Tension (THT : 225 kV/440 kV) et à Haute Tension (HT : 63 kV/90 kV). L'électricité est ainsi acheminée sur de longues distances et avec un minimum de pertes. Expliquer alors comment les transformateurs constituent des éléments centraux de la chaîne de transport de l'électricité ?

14) Le fonctionnement d'un transformateur est-il possible pour des signaux continus ? Justifier votre réponse.

15) Quel peut être l'intérêt d'utiliser un transformateur si les circuits primaire et secondaire comportent le même nombre de spires ?

16) Technologiquement, les matériaux magnétiques des transformateurs sont réalisés en accolant des feuillets en acier. Quel type de pertes cherche-t-on ainsi à éviter ?