Equations de Maxwell

Extrait du programme

Dans la partie **4.3 « Équations de Maxwell »**, une vision cohérente des lois de l'électromagnétisme est présentée. Elle constitue une première approche quantitative du phénomène de propagation et permet également de revenir qualitativement sur l'induction étudiée en classe de première année. Aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.3. Équations de Maxwell	
Principe de la conservation de la charge : formulation locale.	Établir l'équation locale de la conservation de la charge dans le cas à une dimension cartésienne.
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Relier qualitativement le couplage spatiotemporel entre champ électrique et champ magnétique au phénomène de propagation.
Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants.	Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.
Cas des champs statiques : équations locales.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.

Sommaire

3 Questions de cours

1) Démontrer le principe de conservation de la charge en unidimensionnel et l'énoncer en 3D.

2) Donner les quatre équations de Maxwell dans le vide (nom et formulation).

3) Etablir les lois intégrales des champs à partir des équations de Maxwell.

4) Qu'appelle-t-on courant de déplacement ? Quelle est son origine physique ?

5) Comment se simplifie les équations de Maxwell dans le cadre d'un régime permanent ?

6) Etablir les lois intégrales des champs statiques.

4 Exercices d'applications directes du cours

4.1 Calcul d'une densité de charge

Déterminer la densité volumique de charge $\rho(x)$ correspondant au champ électrique suivant :

$$\begin{cases} \vec{E} = -E_0 \vec{u}_x \quad pour\ x < -a \\ \vec{E} = E_0 \dfrac{x}{a} \vec{u}_x\ pour\ -a \leq x \leq a \\ \vec{E} = E_0 \vec{u}_x\ pour\ x > a \end{cases}$$

4.2 Etude d'un champ électrique à distribution cylindrique

Soit le champ $\vec{E}$ à symétrie cylindrique, défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} E_r = E_0 \dfrac{r}{r_0} \quad si \quad r \leq r_0 \quad E_r = E_0 \dfrac{r_0}{r} \quad si \quad r > r_0 \\ E_\theta = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

1) Déterminer les lignes de champ. Comment varie $\vec{E}$ le long d'une ligne de champ ?

2) Calculer $div\vec{E}$ en tout point. Pour un champ radial en coordonnées cylindriques, quelle est la loi permettant d'assurer une divergence nulle ?

En coordonnées cylindriques : $div\vec{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r a_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$

3) Exprimer, par deux méthodes différentes le flux $\phi = \iint_\Sigma \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$, où Σ est un cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon $r < r_0$.

4) Si $\vec{E}$ est un champ électrostatique, à quelle distribution de charges le problème correspond-il ?

5) Que vaut le rotationnel de ce champ ?

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$

4.3 Champ magnétostatique tourbillonnaire

Soit le champ vectoriel $\overrightarrow{W}$ défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} W_r = 0 \\ W_\theta = W_0 \dfrac{r}{r_0} \quad si \quad r \leq r_0 \quad W_\theta = W_0 \dfrac{r_0}{r} \quad si \quad r > r_0 \\ W_z = 0 \end{cases}$$

1) Justifier l'appellation de champ de tourbillon.

2) Exprimer la circulation de $\overrightarrow{W}$ sur le cercle de centre O d'axe Oz et de rayon $r < r_0$ parcouru dans le sens trigonométrique .

3) Calculer en tout point $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{W})$, puis vérifier le résultat du 2) par application du théorème de Stokes.

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$

4) Calculer la divergence du champ en tout point.

En coordonnées cylindriques : $div\vec{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r a_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$

5) Si le champ étudié ici est un champ magnétostatique : quelle est la distribution de courant correspondante ?

4.4 Champ électromagnétique

On considère une situation dans laquelle le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(x,t) = E_0\, cos(\omega t - kx)\,\overrightarrow{u_x}$

En déduire l'expression du champ magnétique sachant qu'il ne peut pas être uniforme. Puis calculer séparément les densités de charge et de courant et vérifier la relation qui les lie.